OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER, 1898. Nr. 6.

Nouveau principe pour études de géométrie des droites.

Par

Johannes Petersen.

Introduction.

En formulant une proposition sur une figure plane quelconque, pourvu qu'elle satisfasse à certaines conditions, il arrive que si la figure varie sans détriment pour la proposition, on a en réalité une infinité de propositions dont les combinaisons rendent possibles les recherches relatives aux systèmes à plusieurs dimensions, susceptibles d'être représentés par des figures dans l'espace, la géométrie de ces dernières n'ayant aucune relation directe et évidente avec la géométrie plane, mais lui empruntant exclusivement ses moyens de déduction.

Le fait que telle proposition formulée reste vraie pour une infinité de figures appartenant à une catégorie déterminée, permet d'appliquer la formule à, par exemple, deux figures différentes prises dans ce même groupe, ce qui donne immédiatement une proposition relative à un système à quatre dimensions dont l'élément consisterait en deux points pris dans le plan.

Si, dans une figure arbitrairement empruntée à une catégorie définie, les longueurs ont entre elles certaines relations métriques, il suffit de produire un déplacement infiniment petit incapable d'altérer la nature de la figure et, partant, l'existence de ces relations, pour qu'on en arrive à une proposition sur les nouveaux éléments auxquels peut donner lieu la combinaison des longueurs primitives et de leurs quantités différentielles déterminées par le déplacement.

Ce *principe de duplication* m'a servi en géométrie sphérique, et j'ai pu, en conséquence, établir une harmonie remarquable entre cette géométrie sphérique et la géométrie des droites dans l'espace, harmonie que j'étudierai plus en détail dans les recherches qui vont suivre.

Comme résultat important on peut citer d'avance celui que voici: L'expression par une figure plane, d'une proposition quelconque de géométrie projective, donne une proposition correspondante dans l'espace, si l'on remplace, d'un côté, par «droite arbitraire» le «point» (ou «droite») arbitraire», et, de l'autre, par «la normale commune à deux droites» la «droite qui joint deux points (ou «le point de rencontre de deux droites»).

La nouvelle proposition comprendra alors et la proposition transformée et sa corrélative, peut-être aussi plusieurs autres propositions exprimées par les figures planes.

Pour le prouver, partons d'un principe relatif au transport de la géométrie sphéro-métrique aux figures formées dans l'espace par des droites, principe qui épuise la question de l'origine des relations entre les distances et les angles dans une figure arbitraire de droites, en fournissant la preuve que ces relations se déduisent exclusivement de la géométrie sphérique.

Ce principe est remarquable: il pourrait bien être considéré comme la base fondamentale de la géométrie métrique des droites. Son existence m'a poussé immédiatement à tenter diverses voies pour représenter sous forme nouvelle les points complexes du plan. Mais les résultats de ces tentatives ne répondant pas à l'attente que le principe semblait *a priori* promettre de satisfaire, j'ai renversé ma marche et, répondant à la question d'extensions des nombres algébriques qui seraient l'image analytique de la *duplication* dans la géométrie sphérique, j'ai établi que la géométrie des droites peut être conçue comme la géométrie d'un faisceau de droites dans laquelle on opère sur des droites symboliques qui sont représentées en position par un symbole de la forme $a + \varepsilon b$, où a et b sont des nombres complexes et $\varepsilon^2 = 0$.

En mécanique, ceci devient important; car alors un système arbitraire de forces dans l'espace peut être représenté par une force unique dont la valeur est donnée par le symbole $a + \varepsilon b$, où a et b sont réels, l'axe de la résultante étant soit l'axe central réel du système, soit une droite symbolique passant par un point pris au hasard; mais quant à l'importance ultérieure que cette représentation pourrait avoir pour la solution des problèmes de mécanique, elle n'a pas encore été l'objet de mon attention spéciale.

Le présent travail contient un exposé succinct des susdits principes et de leur application aux problèmes qui traitent des propositions tant connues que nouvelles, et je m'en suis constamment tenu aux recherches les plus élémentaires.

Théorème fondamental.

1. Soit sur une sphère dont le centre est O un triangle ABC; supposons que les côtés aient pour directions positives AB, BC et CA, choisies de telle sorte que pour un observateur placé sur la face convexe du triangle, un mouvement dont le sens est ABC, semble s'effectuer à droite. Les pôles positifs que cela déterminera pour les côtés AB, BC et CA, seront respectivement C^1, A^1 et B^1. Pour déterminer absolument un angle de ce triangle, il faut le considérer comme le chemin angulaire inférieur à 180° que l'une des directions positives des deux côtés de cet angle doit faire autour du sommet de l'angle pour coïncider avec l'autre direction. Supposons que le triangle donné subisse sur la sphère un déplacement infiniment petit, d'où résultent, pour les côtés, des accroissements infiniment petits, indépendants les uns des autres. Les six différentielles dA, dB, dC, $d(BC)$, $d(CA)$ et $d(AB)$ sont représentées par six segments finis qui leur sont proportionnels, savoir OA_1, OB_1, OC_1, OA_2, OB_2 et OC_2 portés respectivement par OA, OB, OC, OA^1, OB^1 et OC^1. Appelons ces six segments les *fluxions* des angles et des côtés. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Quand un triangle sphérique variable, tracé sur une sphère donnée, y subit un déplacement arbitraire infiniment petit, la somme géométrique des fluxions des angles et des côtés sera nulle.

Pour démontrer ceci, considérons d'abord le cas particulier où l'angle $A = 90°$, $dB = 0$ et $d(BC) = 0$. Comme il ne s'agit ici que des accroissements mêmes des côtés et des angles, sans égard à la relation mutuelle de position entre les deux triangles consécutifs, nous pouvons maintenir immobiles B et C, et amener A à la position A'' (sur AB).

Le triangle $AA''C$ donne alors d'après des formules connues:

$$\frac{\sin d(AB)}{\sin dC} = -\frac{\sin (CA)}{\sin (CA''B)}$$

ou
$$d(AB) = -\sin (CA) \cdot dC \qquad (1);$$

en outre

$$\cot (A + dA) \cdot \cot (dC) = \cos (CA'')$$

ou bien, puisque $A = 90°$:

$$dA = -\cos (CA) \cdot dC \qquad (2).$$

(1) et (2) donnent alors, conformément aux indications adoptées:

$$OC_2 = -\sin(CA)\cdot OC_1 \quad \text{et}$$
$$OA_1 = -\cos(CA)\cdot OC_1.$$

Comme de plus

$$OB_2 = 0$$
$$OA_2 = 0$$
$$OB_1 = 0,$$

il suffira de démontrer que la somme géométrique de OC_1, $OC_2 = -\sin(CA)\cdot OC_1$ et $OA_1 = -(\cos CA)\, OC_1$ est nulle; mais on le constate en projetant sur OA et OC^1, ce qui donne:

$$OC_1 \cos(CA) + OA_1 = 0$$
$$OC_1 \sin(CA) + OC_2 = 0.$$

Et comme en même temps OC_1, OC_2 et OA_1 sont situés dans le même plan, la proposition est démontrée.

Si l'on a un triangle ABC, où $A = 90°$, et que ce triangle subisse un déplacement infiniment petit dont la condition est que $d(BC) = 0$, ce déplacement équivaut à deux autres, le premier mouvement laissant B constant, tandis que C prend l'accroissement demandé, l'autre déplacement laissant C constant, mais donnant à B la grandeur désirée. Puisque la proposition énoncée est vraie pour chacun de ces déplacements, elle l'est encore pour le déplacement considéré en premier lieu.

Partageons un triangle sphérique arbitraire ABC en deux triangles rectangles ABD et DBC, et qu'il s'y produise une variation infiniment petite, telle, que les fluxions de AB et de BC soient nulles; alors les fluxions des côtés et des angles de ABC auront la même somme géométrique que les fluxions latérales et angulaires des deux triangles ABD et DBC. Ceci servant de preuve à la proposition dans le cas d'un triangle où deux des côtés sont invariables, cette même proposition doit rester vraie en général; car une modification arbitraire infiniment petite se ramène à trois variations successives dont chacune laisse constants deux des côtés, pendant que le troisième côté prend l'accroissement qui lui est assigné.

Voici une autre manière de formuler le théorème énoncé:

Les fluxions et des côtés (angles) d'un triangle sphérique variable et des côtés (angles) du triangle polaire ont une somme géométrique nulle.

Cette proposition peut s'étendre à un polygone sphérique quelconque; car celui-ci peut se décomposer en triangles dont les angles et côtés ont des fluxions dont l'addition géométrique donne la somme géométrique des fluxions latérales et angulaires du polygone, et cette somme devient nulle, si le polygone subit une variation arbitraire infiniment petite.

Étant donné qu'un triangle sphérique ABC subit un changement infiniment petit, nous sommes en état de construire les fluxions des angles, quand nous connaissons les fluxions des côtés et réciproquement. En effet, on pourra construire un hexagone gauche dont les angles seront tous droits et dont les côtés seront égaux aux fluxions en grandeur et en direction.

Les directions de tous les côtés sont connues ainsi que les grandeurs (signes compris) de trois côtés dont deux à deux ne sont pas contigus. Désignant par $PQRSTU$ l'hexagone cherché et ayant les côtés PQ, RS et TU, on peut tracer PQ; les droites QR et PU étant ultérieurement connues et RS et TU étant données en grandeur et en direction, l'on a pour lieux géométriques de S et de T deux droites s et t, respectivement parallèles à QR et à PU; il ne reste donc plus qu'à tracer dans une direction donnée une droite coupant s et t. En général il sera facile de déterminer trois des fluxions, quand les trois autres sont données.

Inversement: étant donné un hexagone gauche dont les angles sont droits, on peut construire un triangle sphérique correspondant, dont une variation infinitésimale pourra être déterminée de telle sorte que les côtés de l'hexagone fassent connaître la grandeur des fluxions des côtés et angles du triangle.

2. Par figure trilinéaire dans l'espace nous comprendrons l'ensemble de trois droites A, B et C placées arbitrairement, leurs plus courtes distances étant a, b et c (savoir a de B à C, etc.). Nous dénommerons A, B et C les *arêtes* de la figure, a, b et c ses *côtés*, ces six droites étant les côtés d'un hexagone gauche qui n'a que des angles droits [1]).

Or si, sur une sphère dont le centre est O, l'on trace un triangle sphérique PQR tel que OP soit parallèle à A, OQ à B, OR à C, alors, d'après le n^0 1, toute relation entre les parties du triangle PQR conduira à une relation entre les parties de la figure trilinéaire, en différentiant la relation sphérique et remplaçant les différentielles par les longueurs correspondantes de la figure des droites.

Nous désignerons par $[A]$, $[B]$, $[C]$ les longueurs des arêtes et par $[a]$, $[b]$, $[c]$ les longueurs des côtés d'une figure trilinéaire; les angles auront pour symboles (A), (B), (C) (angles d'arêtes), (a), (b), (c) (angles des côtés).

Une relation arbitraire entre les angles d'une figure trilinéaire peut donc susciter une nouvelle relation par une différentiation totale de la relation donnée, et permettre immédiatement de remplacer les différentielles des angles $d(a)$, $d(b)$, $d(c)$ .... par les longueurs correspondantes $[a]$, $[b]$, $[c]$ ....

Or il est assez évident que ce principe met à même de déduire toutes les relations entre les distances et les angles d'une figure arbitraire de droites, sans autre auxiliaire que les relations angulaires de la figure, ou, ce qui revient au même, en s'aidant seulement des relations d'un angle polyèdre dont les arêtes sont parallèles aux droites de la figure.

Nous appellerons le polygone sphérique corres-

[1]) Ce procédé s'applique à la définition d'une figure n-linéaire.

pondant à cet angle polyèdre *l'indicatrice* de la figure de droites.

3. Avant de donner des exemples de l'application de ce principe, nous avons à introduire quelques paramètres, et, pour déterminer le rapport mutuel de position entre deux droites de l'espace, a et b, l'angle des droites sera désigné par (ab) et leur distance par $[ab]$.

Or, comme

$$d \sin(ab) = \cos(ab)\, d(ab)$$
$$d \cos(ab) = -\sin(ab)\, d(ab)$$
$$d\, tg\,(ab) = \frac{d(ab)}{\cos^2(ab)}$$
$$dl \sin(ab) = \cot(ab)\, d(ab)$$

(l étant le logarithme népérien)

$$dl \cos(ab) = -tg\,(ab)\, d(ab)$$
$$dl\, tg\,(ab) = (\cot(ab) + tg\,(ab))\, d(ab),$$

nous introduirons les paramètres que voici:

$$M_{ab} = -[ab] \sin(ab), \qquad P_{ab} = [ab] \cot(ab)$$
$$N_{ab} = [ab] \cos(ab) \qquad Q_{ab} = -[ab]\, tg\,(ab)$$
$$T'_{ab} = \frac{[ab]}{\cos^2(ab)} \qquad T_{ab} = P_{ab} - Q_{ab} =$$
$$[ab]\,[tg\,(ab) + \cot(ab)] = \frac{2\,[ab]}{\sin 2\,(ab)},$$

parmi lesquels P_{ab}, Q_{ab} et T_{ab} sont indépendants des directions positives des droites, la direction positive de $[ab]$ déterminant le sens du parcours de (ab) [1]). Ce sont ces paramètres que nous emploierons de préférence par la suite.

---

[1]) Voici comment dans ce qui suit nous choisissons les signes des distances et des angles d'une droite a à une autre droite b, a et b ayant des directions positives déterminées: Nous supposons autour de $[ab]$ un déplacement hélicoïdal qui fait prendre à a la position b; la direction positive de l'axe de la rotation qui fait partie de ce déplacement hélicoïdal devient alors direction positive pour la distance $[ab]$.

Le signe de $[ab]$ n'est donc déterminé que quand on a le sens de parcours de l'angle (ab).

$M_{ab} = -[ab] \sin(ab)$ devient en conséquence de cette disposition la grandeur qu'on appelle ordinairement le moment des droites.

Relations métriques de quelques figures élémentaires de droites.

4. Une figure trilinéaire n'est parfaitement déterminée que quand les arêtes et les côtés ont des directions positives déterminées. Rien n'empêche de les choisir tout à fait arbitrairement, les droites mêmes une fois données; mais nous nous en tiendrons à la convention que seules les directions des arêtes sont choisies arbitrairement; après quoi l'on choisit pour les lignes des directions positives de manière à avoir toujours moins de 90° pour la plus petite valeur absolue de l'angle fait par l'arête avec le côté opposé.

Ensuite, en comptant les angles, on prend toujours la plus petite valeur absolue des angles faits par les directions positives des droites. D'après cela l'indicatrice sphérique est un triangle convexe dans lequel on a affaire à des angles extérieurs.

Nous voici maintenant en état de déterminer les relations entre les douze éléments de la figure, en partant des relations sphériques connues.

Ainsi l'on a:

$$\frac{\sin(A)}{\sin(a)} = \frac{\sin(B)}{\sin(b)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)},$$

d'où

$$dl\sin(A) - dl\sin(a) = dl\sin(B) - dl\sin(b) =$$
$$dl\sin(C) - dl\sin(c),$$

ce qui donne, en appliquant notre principe:

$$P_A - P_a = P_B - P_b = P_C - P_c,$$

où, pour abréger, nous avons mis P_A, P_a .... au lieu de P_{bc}, P_{BC} ....

En traitant de la sorte trois des relations mutuellement indépendantes du triangle sphérique, on obtient six relations de la figure trilinéaire, savoir les trois relations sphériques et celles qu'on en déduit en appliquant les règles indiquées sous le n° 2. Ce nombre suffit exactement à déterminer la figure par six éléments.

L'équation $\cos(a) = \cos(b)\cos(c) - \sin(b)\sin(c)\cos(A)$ donne

$$Q_a \cos(a) = \cos(b)\cos(c)(Q_b + Q_c) - \sin(b)\sin(c)\cos(A)(P_b + P_c + Q_A).$$

La formule de Gauss

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b)$$

donne la relation suivante:

$$P_{\frac{A+B}{2}} + Q_{\frac{c}{2}} = P_{\frac{C}{2}} + Q_{\frac{a-b}{2}},$$

où

$$P_{\frac{A+B}{2}} = \frac{[A]+[B]}{2}\cot\frac{(A)+(B)}{2}$$

$$Q_{\frac{c}{2}} = -\frac{[c]}{2}tg\frac{(c)}{2}, \text{ etc.}$$

5. Notre principe donne sans intermédiaire les propositions que voici: à droite celle de la géométrie des droites; à gauche, celles dont on les a déduites et qui sont connues sur la sphère:

Si trois points A, C et B sont situés sur un grand cercle, et que D soit un point ayant 90° pour distance sphérique de C, on aura: $\frac{\sin(AC)}{\sin(BC)} = \frac{\cos(AD)}{\cos(BD)}$ (condition nécessaire et suffisante pour que $CD = 90°$).	Si trois droites dans l'espace a, c et b ont la même normale, et que pour c on prenne arbitrairement une normale d, cette normale satisfera aux équations: $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} = \frac{\cos(ad)}{\cos(bd)}$ et $P_{ac} - P_{bc} = Q_{ad} - Q_{bd}$ (conditions nécessaires et suffisantes pour que d soit normale à c).

La plus courte distance d'une droite a à une droite b sera dorénavant désignée par $[ab]$. Si deux droites a et b sont déterminées de signe, on pourra trouver pour $[ab]$ une seule normale m telle que $[am] = [mb]$ et $\angle(am) = \angle(mb)$; c s'appelle la bissectrice intérieure de a et de b (plus bref: de $[ab]$), la bissectrice extérieure étant la normale commune à m et à $[ab]$.

On a alors:

Le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés A et B sur la sphère, est un grand cercle perpendiculaire à l'arc AB dans son milieu.

Toutes les droites formant des angles égaux avec deux droites de l'espace déterminées de direction, a et b, et équidistantes de ces dernières (signes compris), sont des normales à la bissectrice extérieure de $[ab]$.

6. Les propositions sphériques de Menelaos et de Ceva donnent les théorèmes suivants dans l'espace:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que trois normales a_1, b_1 et c_1 aux côtés a, b et c d'une figure trilinéaire aient une normale commune, sont:

$$\frac{\sin(Ac_1)}{\sin(c_1B)} \cdot \frac{\sin(Ba_1)}{\sin(a_1C)} \cdot \frac{\sin(Cb_1)}{\sin(b_1A)} = -1$$

et $$P_{Ac_1} - P_{c_1B} + P_{Ba_1} - P_{a_1C} + P_{Cb_1} - P_{b_1A} = 0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que trois normales a_1, b_1 et c_1 aux côtés a, b et c d'une figure trilinéaire aient des positions qui donnent une normale commune aux plus courtes distances de ces normales aux arêtes opposées de la figure, sont:

$$\frac{\sin(Ac_1)}{\sin(c_1B)} \cdot \frac{\sin(Ba_1)}{\sin(a_1C)} \cdot \frac{\sin(Cb_1)}{\sin(b_1A)} = +1 \quad \text{et}$$

$$P_{Ac_1} - P_{c_1B} + P_{Ba_1} - P_{a_1C} + P_{Cb_1} - P_{b_1A} = 0.$$

Parmi les applications de ces propositions, en voici de remarquables que, d'ailleurs, il est facile de déduire directemeut:

Dans une figure trilinéaire, les plus courtes distances des arêtes, aux côtés opposés ont une normale commune.

Les trois bissectrices extérieures des côtés ont une normale commune.

Les plus courtes distances des arêtes aux bissectrices intérieures des côtés opposés, ont une normale commune.

7. Si, sur une sphère, deux groupes de quatre points $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ sont situés chacun sur un grand cercle de manière à ce que les distances sphériques AA_1, BB_1, CC_1 et DD_1 soient toutes $= 90°$, on a:

$$\frac{\sin(AB)}{\sin(AD)} : \frac{\sin(CB)}{\sin(CD)} = \frac{\sin(A_1B_1)}{\sin(A_1D_1)} : \frac{\sin(C_1B_1)}{\sin(C_1D_1)};$$

par conséquent:

Si l'on a un groupe de quatre droites a, b, c et d ayant la même normale n et qu'on forme un nouveau groupe a_1, b_1, c_1 et d_1 en prenant les plus courtes distances d'une droite arbitraire dans l'espace aux quatre droites données, on a la relation suivante:

$$(P_{ab} - P_{ad}) - (P_{cb} - P_{cd}) = (P_{a_1b_1} - P_{a_1d_1}) - (P_{c_1b_1} - P_{c_1d_1})$$

outre la relation angulaire:

$$(abcd) = \frac{\sin(ab)}{\sin(ad)} : \frac{\sin(cb)}{\sin(cd)} = \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1d_1)} : \frac{\sin(c_1b_1)}{\sin(c_1d_1)} = (a_1b_1c_1d_1).$$

Nous pourrons dénommer la grandeur

$$[abcd] = (P_{ab} - P_{ad}) - (P_{cb} - P_{cd})$$

différence anharmonique des droites.

Inversement on a:

Deux groupes de quatre droites $abcd$ et $a_1b_1c_1d_1$, chacun à part système de normales à une même droite, et tellement situés que

$$(abcd) = (a_1b_1c_1d_1) \quad \text{et}$$
$$[abcd] = [a_1b_1c_1d_1]$$

peuvent toujours être déplacés de telle manière que a_1, b_1, c_1 og d_1 soient des normales respectives à a, b, c et d.

Si $(abcd) = -1$ et $[abcd] = 0$, les quatre droites sont dites *orthoharmoniques*.

Si l'on a trois normales a_1, b_1 et c_1 aux côtés d'une figure trilinéaire et qu'on appelle a_2 la plus courte distance de $[b_1 c_1]$ à a, l'on aura, en vertu des extensions des propositions de Menelaos et de Ceva:

$$[Ba_1\, Ca_2] = 0 \text{ et } (Ba_1\, Ca_2) = -1.$$

On a alors une figure qui correspond à un quadrilatère complet ordinaire, de façon qu'aux groupes harmoniques de points et de droites de ce quadrilatère correspondent, dans la figure, des groupes orthoharmoniques de droites. Deux droites, et leurs bissectrices forment un groupe de droites orthoharmoniques.

Si, sur quatre droites orthoharmoniques, trois passent par le même point, la quatrième doit y passer aussi. Si les trois premières droites sont a, b et c et la quatrième d, on a en effet $P_{ab} = 0$, $P_{cb} = 0$; par conséquent, puisque $[abcd] = 0$, $P_{ad} = P_{cd}$, $[ad] \cot (ad) = [cd] \cot (cd)$, ce qui ne peut se réaliser que pour $[ad] = 0$, dans le cas où a, b et c sont des droites différentes.

Ayant quatre lignes orthoharmoniques a, b, c et d et m bissectrice de $[ac]$, on a: $tg^2 (am) = tg (mb) \cdot tg (md)$, donc aussi $T_{am} = \frac{1}{2} (T_{mb} + T_{md})$.

Faisceaux de normales orthoprojectifs.

8. Nous avons maintenant les éléments suffisants d'une extension complète de la géométrie projective. L'ensemble des ∞^2 normales à une droite dans l'espace constitue un faisceau de normales. Nous appelons *orthoperspectifs* deux faisceaux de normales, quand une droite de l'un de ces faisceaux correspond, dans l'autre faisceau, à la droite qui la coupe à angle droit. Si plusieurs faisceaux sont orthoperspectifs deux à deux, on dit que deux quelconques d'entre eux sont *orthoprojectifs*. De la géométrie sphérique on tire alors la proposition que deux faisceaux de normales orthoprojectifs peuvent être rendus orthoperspectifs par déplacement.

A un groupe de normales parallèles prises dans l'un des faisceaux, répond un système de parallèles semblable au premier groupe et appartenant à l'autre faisceau. Les plans mutuellement correspondants des faisceaux de parallèles, sont des plans correspondants dans deux faisceaux de plans projectifs dans l'acception ordinaire de ce terme. Si deux faisceaux de normales orthoprojectifs ont la même base, il existe généralement deux droites qui coïncident avec leurs correspondantes. Toutefois il peut y avoir encore une infinité de droites communes dont un nombre infini sont parallèles. Nous allons rechercher dans quelle condition cela peut arriver.

Appelons a et b deux droites communes parallèles; c et d deux droites arbitraires d'un faisceau, et c_1 et d_1 leurs correspondantes dans l'autre. Alors on doit avoir:

$$[abcd] = [abc_1d_1]$$

ou $$(P_{ac} - P_{bc}) - (P_{ad} - P_{bd}) = (P_{ac_1} - P_{bc_1}) - (P_{ad_1} - P_{bd_1})$$

ou $$[ab](\cot(ac) - \cot(ad)) = [ab](\cot(ac_1) - \cot(ad_1)).$$

Si donc on forme les ponctuelles projectives collocales $ACD\ldots$ et $AC_1D_1\ldots$, qui constituent l'indicatrice sphérique des faisceaux de normales considérés, on a

$$\cot(AC) - \cot(AC_1) = \cot(AD) - \cot(AD_1),$$

ce qui prouve, comme on le sait, que les ponctuelles projectives $ACD\ldots$, et $AC_1D_1\ldots$ n'ont qu'un point commun A.

Donc:

Deux faisceaux de normales orthoprojectifs ne peuvent avoir une infinité de droites communes que si les ponctuelles sphériques correspondantes ont des points communs qui coïncident; s'il en est ainsi, ils ont de commun tout un faisceau de parallèles.

Les faisceaux collocaux de normales peuvent être égaux, auquel cas ou bien ils n'ont aucune ligne commune, ou bien il y a coïncidence complète.

Ci-dessus nous avons traité deux droites parallèles a et b de la même manière que nous avons traité d'autres droites: c'est une application du transport des relations de la géométrie sphérique à la géométrie des droites. On peut agir ainsi en concevant les droites parallèles comme positions limites des droites non parallèles. Dans notre nouvelle géométrie on peut donc dire que le parallélisme est une conception infinitésimale.

9. Les emprunts constants que nous faisons de nos résultats à la géométrie sphérique, montrent que

l'un des deux faisceaux de normales orthoprojectifs contiendra une paire de normales réciproques a et b correspondant à une paire analogue a_1 et b_1 de l'autre faisceau.

En déplaçant ce dernier de telle sorte que a_1 et b_1 tombent respectivement sur b et a, les faisceaux deviendront collocaux, et chaque droite aura la même correspondante, quel que soit celui des deux faisceaux auquel on la considère comme appartenant. Nous disons alors que les faisceaux forment une *orthoinvolution*.

S'il y a des droites communes, elles se relieront orthoharmoniquement à une paire de droites prise arbitrairement dans l'involution.

Si l'une des deux droites correspondantes perpendiculaires entre elles est o, et une paire arbitraire de l'involution a et a_1, l'on a

$$tg(oa) \cdot tg(oa_1) = k$$

$$T_{oa} + T_{oa_1} = K,$$

où k et K sont des constantes. Pour $k = -1$ et $K = 0$, l'on a une involution orthoperspective, c'est-à-dire dont les droites correspondantes sont constamment des normales réciproques.

Si k est négatif et $K \lesseqgtr 0$, l'on ne trouve aucune droite commune et seulement une paire de normales réciproques, o et o_1 qui se correspondent. En cherchant à o_1 une normale x telle que $\sin(ox) = \pm\sqrt{-k}$, $P_{ox} = \frac{K}{2}$, on verra que les plus courtes distances de x aux paires de droites de l'involution donnée, constituent une involution orthoperspective.

Voici les conditions pour que les trois paires de normales à une droite donnée, soit aa_1, bb_1, cc_1 forment une orthoinvolution:

$$\sin(ab_1)\cdot\sin(bc_1)\cdot\sin(ca_1) = \sin(ac_1)\cdot\sin(ba_1)\cdot\sin(cb_1)$$

et
$$P_{ab_1} + P_{bc_1} + P_{ca_1} = P_{ac_1} + P_{ba_1} + P_{cb_1}.$$

Si les cinq droites sont situées dans le même plan, la sixième aussi doit se trouver dans ce plan. Prenons les plus courtes distances d'une droite arbitraire dans l'espace à six droites formant un faisceau et en involution, nous aurons six droites formant une orthoinvolution, qui pourtant n'est pas la plus générale; en effet, quand on a cinq normales à une droite donnée, il est généralement impossible de trouver dans l'espace un point dont les distances à ces droites soient situées dans un même plan.

La proposition de Desargues sur le quadrilatère complet conduit au théorème suivant:

Les plus courtes distances d'une droite dans l'espace aux arêtes d'une figure trilinéaire et aux distances d'une autre droite aux côtés, sont en orthoinvolution.

Conoïde de Plücker.

10. Si, sur une droite et à partir de trois points A, B et C, on détermine un quatrième point D, qui se relie harmoniquement aux points donnés, puis un point harmoniquement relié à trois quelconques des points précédents, et ainsi de suite, on pourra répéter ces opérations assez de fois pour approcher autant qu'on voudra de n'importe quel point de la droite.

En appliquant un pareil procédé à trois droites arbitraires a, b, c, normales à une droite l dans l'espace, dans le but d'en obtenir une infinité telle que chaque nouvelle droite se relie orthoharmoniquement à trois des précédentes, on aura une surface formée par les normales construites et par les normales dont on peut approcher autant qu'on le veut à l'aide d'un nombre convenable d'opérations. En effet, traçons les plus courtes distances d'une droite arbitraire l_1 aux normales construites $abcd\ldots\ldots$, nous avons un système tout à fait analogue $a_1b_1c_1d_1\ldots\ldots$, et si nous choisissons l_1 tel que $a_1b_1c_1$ passent par le même point, tout le nouveau système de normales formera un faisceau de droites ayant son sommet sur l_1.

Si l'on choisit sur a un point A et que de ce point on abaisse les perpendiculaires b_2 et c_2 sur b et c, le faisceau de droites déterminé par b_2 et c_2 aura précisément le caractère indiqué; car la droite a_2, qui correspond à a, est perpendiculaire à a dans le plan (b_2c_2).

Les droites $abcd$ sont donc les plus courtes distances de la droite l aux diverses droites du faisceau $(a_2b_2c_2\ldots\ldots)$.

Par conséquent elles forment une surface, un conoïde droit du 3e ordre, que Plücker a été le premier à analyser, et qui, sur la proposition de Cayley, a reçu le nom de *cylindroïde.* Toutefois, comme il y a une autre surface de ce nom, nous appellerons celle qui nous occupe *conoïde de Plücker* ou, en raison du mode de génération qu'on vient d'établir, *conoïde harmonique.*

Les propriétés simples de cette surface ont été étudiées par Plücker, Cayley, Ball, Mannheim et autres.

Nous venons de démontrer que les perpendiculaires abaissées d'un point arbitraire de la surface sur les génératrices forment un faisceau. Notre définition a pour autre conséquence que tout plan mené par la directrice contient une génératrice. Un cylindre de révolution qui contient la directrice rectiligne du conoïde coupe cette surface suivant une ellipse, qui par conséquent pourra servir de courbe directrice à la surface. A l'aide de cela, il est facile de démontrer que les projections d'un point arbitraire sur toutes les génératrices ont pour lieu géométrique une ellipse.

Nous avons également fait voir que: Les plus courtes distances d'une droite arbitraire dans l'espace aux génératrices du conoïde, forment une nouvelle surface de même nature, en d'autres termes:

La surface se transforme par changement orthoprojectif en un nouveau conoïde de Plücker.

Le conoïde de Plücker est déterminé par trois génératrices; on a déjà indiqué sa construction.

Deux conoïdes qui ont la même directrice rectiligne, ont généralement deux génératrices communes: c'est ce que révèle leur intersection par un cylindre de révolution contenant la directrice commune. Les courbes d'intersection avec ce cylindre sont alors deux ellipses qui, en général, ont deux points communs.

11. Soit l la directrice d'un conoïde de Plücker dont les génératrices sont normales aux droites d'un faisceau dont le sommet est A et qui est situé dans le plan α; alors la perpendiculaire a abaissée de A sur l sera génératrice de la surface. Il en est de même pour b, celle des normales de l qui est dans le plan α.

Choisissons maintenant une troisième génératrice c et supposons que dans le faisceau (A, α) les droites correspondant à a, b et c soient a_1, b_1 et c_1, on aura (5):

$$P_{ac} - P_{bc} = Q_{ac_1} - Q_{bc_1};$$

et comme a et b coupent c_1, on a

$$P_{ac} = P_{bc}.$$

Une nouvelle génératrice d donnera:

$$P_{ad} = P_{bd}, \text{ et par suite}$$

$P_{ac} - P_{ad} = P_{bc} - P_{bd}$, équation qui, conséquemment, s'applique à quatre génératrices quelconques d'un conoïde de Plücker.

La condition pour que quatre normales à une droite soient situées sur un conoïde de Plücker, est que leur différence anharmonique soit nulle.

Les normales à une droite dont les P-paramètres à deux normales fixes ont une différence constante, constituent un conoïde de Plücker contenant les normales fixes.

Ceci a pour conséquence, d'après la proposition appliquée ci-dessus, que toutes les droites de l'espace dont les Q-paramètres à deux droites fixes ont une différence constante, sont normales aux génératrices d'un conoïde de Plücker qui contient les droites données. Le complexe formé par les droites cherchées est donc du 2e ordre.

Si la différence donnée est nulle, le conoïde de Plücker contiendra non seulement les droites données, mais encore leurs bissectrices.

Les normales d'une droite donnée l dont le T-paramètre par rapport à une normale fixe a à l est constant, ont pour lieu géométrique un conoïde de Plücker contenant a et la normale b commune à a et à l.

En effet, soit x la normale mobile; on a $T_{ax} = P_{ax} - Q_{ax} = P_{ax} - P_{bx} =$ constant, ce qui démontre la proposition.

Quand on connaît trois génératrices quelconques a, b et c d'un conoïde de Plücker, le paramètre de distribution des plans tangents pour la génératrice c sera

$$p_c = P_{ac} + P_{bc} - P_{ab}.$$

En effet, le paramètre de distribution devient P_{cc^1}, quand c^1 est génératrice consécutive de c, et l'on a pour les quatre génératrices a, b, c, c^1:

$$P_{ac} - P_{c^1c} = P_{ab} - P_{c^1b},$$

ce qui démontre la proposition.

Dans le cas particulier où a et b sont deux génératrices du conoïde se coupant à angle droit, on a:

$$p_c = P_{ac} + P_{bc} = P_{ac} + Q_{ac} = [ac](\cot(ac) - tg\,(ac)) \quad \text{ou}$$

$$p_c = 2[ac]\cot 2(ac).$$

12. Si les points à l'infini de six génératrices du conoïde sont en involution, les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la surface sur ces six génératrices, constitueront un faisceau involutif, et par suite les génératrices données seront en orthoinvolution.

Les paires de droites obtenues en groupant les deux génératrices qui partent d'un même point de la directrice, formeront donc une orthoinvolution.

Les ∞^1 conoïdes de Plücker qui ont une directrice donnée l et contiennent deux normales données à cette droite, savoir a et b, forment, disons-nous, un faisceau. En choisissant un point A sur a et abaissant de A des perpendiculaires sur les génératrices de chaque conoïde, on obtient pour chaque conoïde un faisceau de droites (A, α). Tous les plans α forment un faisceau ayant pour axe la perpendiculaire a_1 abaissée de A sur b. a_1 coupe b au point B. Un cylindre de révolution passant par l, A et B coupe les conoïdes en un faisceau d'ellipses qui contient A et B. Si le faisceau de conoïdes est coupé par un plan quelconque perpendiculaire à l, les paires de droites qui en résulteront, feront une involution.

Cette proposition soumise à une transformation orthoprojective, se transforme en la suivante:

Les paires de droites suivant lesquelles un faisceau de conoïdes de Plücker est coupé par un conoïde de Plücker fixe ayant la même directrice que ces conoïdes, constituent une orthoinvolution.

Or, une pareille orthoinvolution ayant en général deux droites communes, on voit que

il y a généralement deux conoïdes de Plücker qui, contenant deux droites données, sont tangents, suivant une génératrice, à un conoïde de Plücker donné qui a pour directrice la plus courte distance de ces droites.

13. L'extension de la proposition de Desargues (9) montre que les plus courtes distances d'une droite arbitraire aux arêtes opposées d'un angle polyèdre complet à quatre faces, forment une orthoinvolution. Si cette dernière est déterminée par deux paires $aa_1 \cdot bb_1$, on peut s'en servir pour déterminer, comme suit, c_1 qui correspond à la droite arbitraire c:

Les conoïdes de Plücker $(a_1 b_1 c)$ et (abc), se coupent suivant la génératrice f, et les conoïdes de Plücker (fa_1b) et (fab_1) se coupent suivant c_1.

En effet, si d'un point quelconque F de f on abaisse des perpendiculaires α, α_1, β, β_1, γ et γ_1, respectivement sur les droites données a, a_1, b, b_1, c et sur la droite trouvée c_1, on trouvera situé chacun dans son plan les groupes de droites suivants:

$$\alpha_1\beta_1\gamma, \quad \alpha\beta\gamma, \quad \alpha_1\beta\gamma_1, \quad \alpha\beta_1\gamma_1,$$

ce qui prouve l'exactitude de la construction.

14. Toutes les surfaces coniques circonscrites à un conoïde de Plücker et dont le sommet est sur cette surface, sont du 2e ordre. Appelons A le sommet et prenons arbitrairement un plan α perpendiculairement à la directrice du conoïde: la trace du cône sur ce plan sera une parabole ayant pour foyer la projection A_1 de A sur α. La perpendiculaire a abaissée de A sur une génératrice quelconque f du conoïde, coupera effectivement α en un tel point P de la trace p du plan (Af)

que A_1P sera perpendiculaire à p. En faisant parcourir le conoïde à f, a décrira un faisceau de droites, et par conséquent la projection P du point fixe A_1, sur la droite mobile p, tracera une droite. p enveloppe donc une parabole dont le foyer est A_1. Appelons cône *parabolique* une surface qui a des paraboles pour sections perpendiculaires aux droites focales, et nous aurons la proposition suivante:

Toutes les surfaces coniques circonscrites à un conoïde de Plücker et ayant leur sommet sur ce conoïde, sont des cônes paraboliques. Inversement, on trouve, en utilisant les considérations ci-dessus, que

Un conoïde droit dont les génératrices touchent un cône parabolique et dont la directrice est parallèle à une des droites focales de cette surface, doit être un conoïde de Plücker.

Réseau harmonique.

15. Si, sur la surface d'une sphère, on prend au hasard quatre points et qu'on les joigne deux à deux par des grands cercles; qu'ensuite on cherche les nouveaux points d'intersection de ces derniers et qu'on s'en serve conjointement avec les points donnés pour continuer cette construction de grands cercles et de points, on obtient sur la sphère un réseau de Möbius. Examinons la génération de droites qui correspond à cette opération. Quatre droites arbitraires dans l'espace, a, b, c et d, sont supposées données. On cherche les plus courtes distances entre ces droites deux à deux, puis, encore une fois, les plus courtes distances e, f, g entre les premières. De la sorte nous avons déterminé trois nouvelles droites e, f, g à l'aide des quatre données a, b, c et d; sur ces sept droites on lève un groupe de quatre, qui sert à déterminer comme ci-devant trois nouvelles droites, etc. La répétition à l'infini de ces opérations donne ainsi une infinité de droites dans l'espace. Les droites obtenues soit exactement, soit avec tout le degré d'approximation désirable par un nombre fini d'opérations, ont donc entre elles des relations analogues à celles des points du réseau de Möbius dans le plan (de la sphère). On dit alors qu'elles forment un *réseau harmonique*. Le réseau formé par les distances entre les droites du premier, en sera dit le *réciproque*.

16. Avec les quatres droites données a, b, c, d, nous déterminerons toutes les droites du réseau qui ont $[ab]$ pour normale. De ces droites on a immédiatement a, b et la normale x commune à $[ab]$ et à $[cd]$; la normale commune à $[bc]$ et à $[ad]$ s'appelle y et celle de $[ac]$ et de $[bd]$, z. Si l'on cherche la plus courte distance x^1 entre $[ab]$ et $[yz]$, on trouvera que a, b, x et x^1 sont quatre droites du réseau; mais elles sont orthoharmoniques: on voit donc que toutes les normales de $[ab]$ qui appartiennent au réseau, peuvent être obtenues en déterminant, à partir de trois d'entre elles, a, b, x, la quatrième droite qui leur est orthoharmonique, et en s'en servant de concert avec les autres par une nouvelle construction du même genre, et ainsi de suite. Le réseau n'admet pas d'autres normales pour $[ab]$: on s'en aperçoit en considérant la figure qui y correspond sur la sphère. Voici donc le résultat:

Dans un réseau donné, toutes les droites normales à une droite du réseau réciproque forment un conoïde de Plücker.

La distance d'une droite arbitraire du réseau réciproque, à $[ab]$ doit être une génératrice du conoïde du réseau primitif dont la directrice est $[ab]$. Si donc on cherche les deux conoïdes du réseau qui ont pour directrices $[ab]$ et $[cd]$, on trouvera que toutes les droites du réseau réciproque sont des normales de génératrices de chacun de ces conoïdes et *vice versâ*.

Toutes les droites d'un réseau déterminé par a, b, c et d sont des normales de génératrices de deux conoïdes de Plücker ayant une génératrice commune.

Les deux surfaces peuvent par exemple avoir pour directrices a et b, dont la première est alors déterminée par les génératrices $[ab]$, $[ac]$ et $[ad]$; l'autre par $[ba]$, $[bc]$ et $[bd]$. Les directrices de tous les conoïdes de Plücker utilisables de cette manière, forment le réseau même qu'on a à déterminer.

17. Nous voici en état de déduire les propriétés les plus essentielles du réseau en considérant deux de ces conoïdes ayant pour directrices a et b et dont la génératrice commune est $[ab]$. Les normales de celle-ci ne sont comprises dans le réseau qu'en qualité de positions limites d'une normale commune à deux génératrices distinctes se rapprochant de $[ab]$. Ces positions limites forment un conoïde de Plücker passant par a et b. Cela résulte de l'exposé précédent, mais on peut aussi le démontrer directement en représentant par (a) et (b) les deux surfaces.

Sur (a) l'on prend au hasard une génératrice a_1; sur (b) une autre génératrice b_1, leur génératrice commune se désignant par f. Une droite x qui est normale de génératrice pour les deux conoïdes, va satisfaire aux conditions suivantes (**11**):

$$Q_{fx} - Q_{a_1x} = k \qquad Q_{fx} - Q_{b_1x} = k_1,$$

où k et k_1 sont des constantes. Par conséquent

$$Q_{a_1x} - Q_{b_1x} = k_1 - k;$$

mais cette équation nous dit que x doit être une normale de génératrice d'un certain conoïde de Plücker passant par a_1 et b_1. Or, si x tend vers les normales à f, les positions limites deviendront les plus courtes distances de f aux génératrices de ce conoïde, et elles engendrent d'elles-mêmes un conoïde de Plücker qui contient a et b. Nous venons également de voir qu'on peut définir le faisceau harmonique le lieu géométrique des droites dont les Q-paramètres à trois droites fixes ont deux à deux une différence constante.

Comme on pouvait ci-dessus choisir a_1 et b_1 de manière à avoir $k = k_1 = 0$, on voit que

Un réseau harmonique peut toujours être défini le lieu géométrique des droites à Q-paramètres égaux à partir de trois droites fixes.

18. Outre les droites qui coupent à angle droit la droite f, les symboles restant comme ci-dessus, il y a dans le réseau une infinité d'autres droites qui coupent f. Si sur f on choisit un point F d'où l'on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices de (a), on obtient un faisceau de droites dans le plan α. Ce plan contient une génératrice g du conoïde (a), passant par le point G où α coupe a. L'autre génératrice de (a) qui passe par G, est perpendiculaire à FG, par conséquent perpendiculaire au plan $[af]$. En faisant mouvoir F sur f, on obtient un nouveau plan α, mais qui passe par la droite fixe g, car G et la projection de F sur g sont constamment situés dans le plan. Les plans α forment donc un faisceau perspectif à la ponctuelle (F). En abaissant des normales de F sur les génératrices de l'autre conoïde, on obtient un plan β qui décrit un faisceau perspectif à la ponctuelle (F).

Les faisceaux de plans (α) et (β) sont donc projectifs, et comme la droite d'intersection de deux plans correspondants, est une normale de génératrice des deux conoïdes et qu'elle coupe la droite f, on a la proposition suivante:

Toutes les droites d'un réseau harmonique qui coupent une droite du réseau réciproque, se partagent en deux groupes distincts, dont l'un est un système de normales à f et donne un conoïde de Plücker, l'autre est l'un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe.

19. Comme, dans le réseau, il n'y a qu'une droite ayant une direction donnée (ce que rend évident l'examen des deux conoïdes), toutes les droites du réseau parallèles à un plan donné forment un conoïde de Plücker, car elles sont normales à la droite unique du réseau réciproque perpendiculaire au plan donné. Il en résulte qu'un conoïde du réseau et un hyperboloïde dont les génératrices appartiennent également au réseau, auront toujours de commun deux génératrices (réelles ou imaginaires). Si donc on choisit un hyperboloïde dans le réseau réciproque, toutes les plus courtes distances de ses génératrices prises deux à deux (et appartenant à l'un des systèmes), formeront le réseau donné.

L'examen de l'un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde quelconque, révèle que les plus courtes distances d'une des génératrices à toutes les autres donnent toujours un conoïde de Plücker; car si l'on fait passer un cylindre de révolution par la génératrice considérée et par la génératrice du système opposé qui lui est parallèle, de telle sorte que l'axe soit situé dans le plan asymptotique qu'elles déterminent, le cylindre coupera l'hyperboloïde suivant une ellipse, ainsi que suivant les deux droites parallèles. Cette ellipse est la courbe directrice du conoïde qui par conséquent est un conoïde de Plücker.

On voit par là que tout hyperboloïde détermine un réseau harmonique contenant l'un des systèmes de génératrices et de telle manière que les doubles normales de l'autre système de génératrices forment les droites du réseau. Mais par ce mode de génération l'on n'arrive pas toujours à donner une détermination réelle à chaque droite du réseau. Prenant pour point de départ cette définition, M. Waelsch [1]) a étudié le réseau. Nous nous en servirons pour établir que tout réseau contient deux faisceaux de droites.

---

[1]) *Sitzber. d. Wiener Akad.*, 95, B.

20. Si l'un des conoïdes de Plücker que comporte le réseau, doit être réduit à un faisceau de droites, la directrice du conoïde doit être située de telle façon que sa projection sur un de ses plans normaux soit le foyer du contour de l'hyperboloïde sur ce plan; en effet, la podaire de la projection en question par rapport au contour susdit doit être une section conique et, d'après cela, une circonférence de cercle. Les seuls points capables d'être les sommets des faisceaux de droites cherchés, sont les foyers du contour de l'hyperboloïde sur les plans cycliques. Si, dans l'un des plans cycliques, on trace des normales aux génératrices de l'un des systèmes, toutes ces normales formeront précisément un faisceau ayant pour sommet l'un des deux points en question. L'autre point s'obtient par une opération analogue en partant de l'autre plan cyclique.

Par conséquent: dans un réseau de droites harmonique on trouve toujours deux faisceaux de droites qui ont une droite commune et dont les droites appartiennent toutes au réseau. Nous dénommerons *foyers* du réseau les sommets des faisceaux et *plans focaux* les plans des faisceaux, tandis que les faisceaux mêmes s'appelleront *faisceaux focaux*.

Veut-on déterminer un réseau harmonique, la plus simple méthode est donc de la définir: un système de droites dont chacune est normale commune à deux droites qui appartiennent respectivement à deux faisceaux qui ont une droite commune.

Le réseau harmonique contiendra l'un des systèmes de génératrices de ∞^1 hyperboloïdes ayant les mêmes axes (les trois axes de symétrie des faisceaux focaux et qui sont: la droite de jonction des foyers et deux perpendiculaires au milieu de cette ligne et faisant des angles égaux avec les plans focaux) et les mêmes plans cycliques, et dont les contours sur chacun des plans focaux sont des sections coniques confocales ayant leurs foyers aux foyers du réseau.

Le réseau réciproque a les mêmes foyers et les mêmes plans focaux; mais le rapport entre ceux-ci et ceux-là est opposé, ce qui rend nouveaux les faisceaux focaux. En outre, ce réseau contient les systèmes de génératrices des hyperboloïdes du premier réseau, qui n'appartiennent pas à ce dernier.

Les deux réseaux réciproques sont donc mutuellement symétriques par rapport aux plans principaux des hyperboloïdes, et leurs droites communes sont les axes des hyperboloïdes.

21. Les faisceaux focaux ne servent qu'incomplètement à déterminer le réseau, qnand les hyperboloïdes en question deviennent des hyperboloïdes de révolution; car dans ce cas les faisceaux focaux se confondent, et le réseau peut alors être engendré par les génératrices d'un conoïde qui tourne autour de l'une des deux génératrices qui sont normales réciproques. Un pareil réseau de révolution se détermine à l'aide du faisceau focal et du T-paramètre constant que doivent former avec son axe toutes ses droites. Celui des hyperboloïdes qui a le plus grand cercle de gorge, sera équilatéral. Les réseaux de révolution sont donc tous semblables, ce qui résulte de ce que tous les conoïdes de Plücker sont semblables.

En définissant le réseau à l'aide de ses faisceaux, on vient de rendre évident que le réseau harmonique ordinaire est une congruence de 3ᵉ ordre et de 2ᵉ classe. C'est cette congruence qui constitue le lieu géométrique des axes d'une multiplicité linéaire de ∞^2 de complexes linéaires.

Les principaux réseaux spéciaux sont:

1° le faisceau ordinaire résultant du passage au même point des quatre droites qu'il faut donner pour déterminer le réseau. Les deux réseaux réciproques sont alors confondus;

2^0 le réseau parabolique, où toutes les droites sont parallèles au même plan;

3^0 l'ensemble des ∞^2 normales à une droite fixe.

Complexe linéaire et complexe hélicoïdal *(screw complex)* de Ball.

22. Nous allons examiner succinctement comment notre nouveau principe peut s'appliquer à déduire quelques propriétés du complexe linéaire. Nous définirons ce complexe l'ensemble de toutes les droites dont le Q-paramètre est constant par rapport à une droite a (l'axe). Soient deux droites de ce genre x et y, passant par le point A et telles que $Q_{ax} = Q_{ay}$, il résulte du n^0 5 que la normale commune à x et à y sera perpendiculaire à la perpendiculaire z abaissée de A sur a, c'est-à-dire que x, y et z sont situées dans un même plan, ce qui prouve que, toutes les droites du complexe qui passent par A, constituent un faisceau dont le plan contient la perpendiculaire abaissée de A sur l'axe. On remarquera que le Q-paramètre est égal au paramètre ordinaire du complexe, mais de signe contraire.

Ayant deux complexes linéaires avec a et a_1 pour axes, k et k_1 pour Q-paramètres, et considérant une droite commune x, on a

$$Q_{ax} = k, \quad Q_{a_1x} = k_1, \quad \text{par conséquent}$$

$$Q_{ax} - Q_{a_1x} = k - k_1,$$ d'où le n^0 11 permet de conclure que toutes les droites communes aux deux complexes doivent être des normales de génératrices d'un certain conoïde de Plücker passant par a et a_1, et auront le Q-paramètre k constant par rapport à a; qu'alors elles auront leurs Q-paramètres égaux par rapport à chacune des génératrices, et que par conséquent, si une des droites considérées coupe le conoïde en trois points réels, ce Q-paramètre peut devenir nul deux fois. On a donc là une preuve des propositions connues que voici:

Les droites communes à deux complexes couperont deux droites fixes (réelles ou imaginaires) et seront contenues dans ∞^1 complexes linéaires dont les axes forment un conoïde de Plücker.

Le lieu géométrique des axes a des complexes linéaires qui contiennent deux droites x et y, s'obtient en posant pour conditions que

$Q_{ax} = Q_{ay}$; ce lieu est donc, d'après le n⁰ 11, le complexe que forment toutes les normales aux génératrices d'un conoïde de Plücker passant par x, y et leurs bissectrices.

Ce complexe, nous l'appellerons *complexe harmonique*; car, si trois droites d'un groupe orthoharmonique lui appartiennent, la quatrième en fera autant. Les normales d'une droite faisant partie du complexe forment en effet un conoïde de Plücker.

Ce qui ramène à dire que

Tout système de complexes linéaires contenant deux droites fixes et dont les axes sont des normales à une droite fixe, constitue un faisceau.

Le lieu géométrique des axes a dans les complexes linéaires qui contiennent trois droites données x, y et z, est un réseau harmonique, puisque $Q_{ax} = Q_{ay} = Q_{az}$.

Les axes des complexes linéaires qui comprennent quatre droites fixes, donnent un conoïde de Plücker, et l'axe d'un complexe comprenant cinq droites prises au hasard, est déterminé univoquement. La démonstration n'est pas compliquée.

23. Les systèmes de droites ci-dessus traités: conoïde de Plücker, réseau harmonique et complexe harmonique, sont identiques à ce que Ball appelle *screw complex of the 2, 3, 4 ordre.* Que le *theory of screws* de Ball conduise aux mêmes recherches géométriques que la théorie métrique du complexe linéaire, c'est ce qui est encore d'avance évident. En effet, tout mouvement hélicoïdal infinitésimal détermine un complexe linéaire de normales des trajectoires, et le paramètre de ce complexe est précisément ce que Ball dénomme la *pitch* propre du mouvement. Deux mouvements hélicoïdaux infinitésimaux ont de commun ∞^2 de normales de trajectoires; mais celles-ci sont communes à ∞^1 de mouvements hélicoïdaux dont les axes sont les génératrices d'un conoïde de Plücker. Ceci répond tout à fait au cas où deux complexes linéaires déterminent un faisceau de complexes dont les axes sont portés par un conoïde de Plücker. Si l'on a démontré les propositions cinématiques, on n'a réellement besoin d'aucune preuve pour les propositions géométriques et *vice versâ*. Lorsque, dans le *screw complex of the 2 ordre,* Ball trouve la *pitch quadric* comme une surface du second degré dont un système de génératrices donne tous les axes dont la *pitch* correspondant est nulle, il prouve par cela même que, dans un ensemble linéaire de ∞^3 de complexes linéaires, on en trouve une infinité qui ont pour paramètre zéro, et dont les axes feront l'un des systèmes de génératrices sur une certaine surface du second degré, dont l'autre système de génératrices est alors l'ensemble des droites communes à tous les complexes, etc.

Figures trilinéaires orthologiques.

24. Le principe que nous avons appliqué à la déduction des relations entre les éléments d'une figure de droites, suffit à prouver que toutes les propositions de géométrie projective peuvent être transportées du plan (à proprement parler, du faisceau dans l'espace) à l'espace, de telle façon que si, ayant une proposition de géométrie plane, on veut obtenir une proposition de géométrie des droites, il suffise de remplacer «droite (point) arbitraire du plan» par «droite arbitraire dans l'espace», et de remplacer «point d'intersection des droites (droite qui joint des points)» par «normale commune aux droites correspondantes». A proprement parler, l'obtention de toute cette partie de la géométrie des droites n'exige que l'extension d'une seule proposition, savoir le théorème des triangles homologiques, extension dont voici la teneur:

Si deux figures trilinéaires se correspondent de telle sorte que dans l'une d'elles une arête et le côté qui lui est opposé correspondent constamment à une arête et à son côté opposé dans l'autre figure; si, de plus, leur situation est telle que les plus courtes distances entre les arêtes correspondantes aient une normale commune, les plus courtes distances entre les côtés correspondants auront aussi une normale commune. Ces figures sont dites *orthologiques.*

La proposition de géométrie plane pouvant se démontrer par la proposition de Menelaos seule et l'extension de cette proposition étant établie, l'on n'a plus à fournir d'autres preuves de la proposition des figures trilinéaires orthologiques. Toutefois nous allons donner une preuve directe appuyée sur des considérations cinématiques; mais c'est uniquement à titre d'exemple d'une démonstration concevable comme extension du *barycentrische Calcul* de Möbius et applicable à plusieurs des recherches auxquelles nous allons toucher ici.

Nous partons donc du fait que, si trois droites dont deux arbitraires ne sont pas parallèles, ont la même normale, on peut déterminer deux mouvements hélicoïdaux infinitésimaux autour de deux de ces droites, de telle manière que le mouvement résultant soit un mouvement hélicoïdal d'une grandeur donnée autour de la troisième droite.

Appelant A, B, C, a, b, c et A_1, B_1, C_1, a_1, b_1, c_1 les arêtes et côtés des deux figures, et n la normale commune de $[AA_1]$, $[BB_1]$ et $[CC_1]$, on peut déterminer, respectivement autour de A, B, C, A_1, B_1, C_1, n, des mouvements hélicoïdaux P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, U tels que

$PP_1 \backsim U$ (P et P_1 ont pour résultante U)
$QQ_1 \backsim \overline{U}$ ($\overline{U}$ est le mouvement hélicoïdal qui détruit U)
$RR_1 \backsim \overline{U}$.

Les mouvements hélicoïdaux PQ et P_1Q_1 se détruisant et l'axe du premier étant normale à c, tandis que l'axe du second est normale à c_1, ces axes doivent se confondre en $[cc_1]$. On voit pareillement que l'axe de $\overline{Q}R$ et de $\overline{Q}_1R_1$ est $[aa_1]$, et celui de $\overline{P}\overline{R}$ et de $\overline{P}_1\overline{R}_1$ est $[bb_1]$. Les trois mouvements hélicoïdaux PQ, $\overline{Q}R$ et $\overline{P}\overline{R}$ ont donc pour axes respectifs $[cc_1]$, $[aa_1]$, $[bb_1]$, et comme ils se détruisent, ces trois droites doivent avoir une normale commune, c. q. f. d.

Figures orthologiques.

25. Nous appelons *orthologiques* deux figures de droites Σ et Σ_1 dans l'espace, quand à une droite a de l'une de ces figures correspond la droite a_1 dans l'autre, de telle sorte que les distances entre des droites correspondantes ont une normale fixe n, tandis que la normale commune à la distance entre deux droites de l'une des deux figures et à la distance entre les droites correspondantes de l'autre, est toujours normale à une droite fixe n^1. La possibilité de cette correspondance résulte de la proposition sur les figures trilinéaires orthologiques. Choisit-on les droites a, b, c et les correspondantes a_1, b_1, c_1 de manière que $[aa_1]$ $[bb_1]$ $[cc_1]$ aient une normale commune n, la droite d_1 correspondant à une droite arbitraire d est parfaitement déterminée. Les distances entre $[ab]$ et $[a_1b_1]$, $[bc]$ et $[b_1c_1]$, $[ca]$ et $[c_1a_1]$ ont pour normale commune n^1. Or, pour construire d_1, d étant donnée, nous traçons $[da]$ et nous en cherchons la distance p à n^1. Alors $[pa_1]$ et $[nd]$ ont d_1 pour normale commune, et l'on a les groupes $abcd$ et $a_1b_1c_1d_1$ déterminés de manière qu'ils ont la corrélation demandée. Nous pourrons appeler n et n^1 le premier et le second axe d'orthologie. La proposition précédemment démontrée et relative à l'immuabilité de la différence anharmonique de quatre droites dans une transformation orthoprojective, nous permet aussitôt de conclure que $[naa_1p]$ est constant, a et a_1 étant une paire arbitraire de droites correspondantes et p normale commune à n^1 et à $[aa_1]$. Comme les points à l'infini pour les droites de l'une des figures, et que les points à l'infini pour les droites correspondantes de l'autre figure, forment deux systèmes homographiques, $(abcd)$ sera constant en même temps, et un système de parallèles en Σ a pour correspondant en Σ_1 un système de parallèles affin au premier. A un faisceau de normales de Σ répond, en Σ_1, un faisceau de normales qui y est orthoprojectif, et à un faisceau de droites de l'une des figures répond un conoïde de Plücker dans l'autre figure. Un faisceau de ∞^2 droites répondra à un réseau harmonique, ce qui fait voir que deux réseaux harmoniques arbitraires dans l'espace ont généralement de commun trois droites, un faisceau de ∞^2 droites et un réseau ayant de commun trois droites (le réseau est une congruence du 3^e ordre). Un système harmonique de droites en Σ (le conoïde, le réseau et le complexe) correspondra à un système harmonique de droites en Σ_1.

Les normales au second axe d'orthologie se correspondent à elles-mêmes; outre ces droites communes aux figures, il y en a encore une, savoir le premier axe d'orthologie.

On arrive à un exemple de figures orthologiques en considérant deux figures égales Σ et Σ_1, capables de se superposer en tournant de 180° autour d'une droite n. Ici, les deux axes d'orthologie se confondent et l'orthologie est involutive.

26. On choisit un plan arbitraire α dans l'une de deux figures orthologiques Σ; toutes ses droites correspondront, en Σ_1, à une congruence α_1 dont toutes les droites sont parallèles à un même plan β (plan directeur de la congruence). Comme ensuite on peut disposer les droites par ∞^1 de faisceaux de parallèles, cette congruence aura une surface focale développable. Si l'on choisit en β trois directions différentes, celles des droites de la congruence qui sont parallèles à ces dernières, se grouperont en trois faisceaux de parallèles dont les plans sont supposés se couper dans le point F. Les droites a_1, b_1, c_1 passant par ce point et ayant les trois directions choisies, correspondront alors dans l'orthologie à trois droites a, b, c du plan α et appartenant à un même faisceau. Les autres droites de ce faisceau, appartenant à Σ, correspondent alors, en Σ_1, aux droites du faisceau ayant F pour sommet et dont le plan est parallèle à β. Mais de là résulte que la surface développable que les droites de la congruence α_1 répondant à α doivent toucher, est une surface conique ayant F pour sommet.

Comme ensuite chaque faisceau de droites de α correspond à un conoïde de Plücker en α_1, dont la directrice rectiligne est perpendiculaire à β et qui contient le point F, on voit que cette surface conique doit être un cône parabolique.

Ainsi la figure orthologique des ∞^2 droites d'un plan arbitraire sera une congruence dont toutes les droites sont parallèles à un même plan et tangentes à un même cône parabolique (cône focal de la congruence) dont l'une des droites focales est perpendiculaire au plan directeur. Nous appelons *réseau parabolique* une pareille congruence. Elle a un seul point singulier F, *le foyer*, qui constitue le sommet du cône focal et du faisceau de droites qui appartient au réseau. La congruence est du 2e ordre et de la 2e classe. Deux réseaux paraboliques ont généralement de commun une droite; toutefois, s'ils ont un même plan directeur, ils ont une infinité de droites communes. Ces dernières forment une surface réglée ayant deux cônes paraboliques pour surfaces directrices, et un plan directeur perpendiculaire à une droite focale dans chacune de ces surfaces coniques. Un plan arbitraire parallèle au plan directeur coupe la surface suivant trois génératrices (sans compter celle de l'infini), dont les projections sur le plan directeur formeront un triangle dont le cercle circonscrit passe par les projections des sommets des deux surfaces coniques directrices. Ceci montre que la surface contient comme courbe double une courbe gauche du 3e ordre, dont la projection sur le plan directeur est un cercle. Une courbe gauche du 3e ordre par où l'on peut faire passer un cylindre de révolution, détermine toujours une surface du genre mentionné, en ce que le plan directeur est une section normale de la surface cylindrique.

27. Les perpendiculaires abaissées du foyer sur toutes les droites d'un réseau parabolique seront situées dans le même plan, savoir le plan tangent au cône focal qui contient les tangentes aux sommets des sections paraboliques de la surface parallèles au plan directeur. C'est pourquoi le réseau est déterminé par cinq quelconques de ses droites, en ce qu'on cherche un point F tel qu'en abaissant des perpendiculaires de ce point sur ces droites, ces perpendiculaires soient situées dans un même plan. Appelons a, b, c, d et e les cinq droites et respectivement $[ab]$ et $[cd]$, p et q, et l'on pourra se servir du procédé suivant pour déterminer le réseau:

Il faut que a et b appartiennent à un conoïde de Plücker (a, b) appartenant lui-même au réseau; c et d sont situées sur un autre conoïde (c, d) qui appartient également au réseau. Ces deux conoïdes doivent avoir une génératrice f de commun, et il doit exister un plan passant par e, contenant une génératrice sur chacune des surfaces et contenant F; ce dernier fait résulte de ce que toutes les droites du réseau parallèles à e, doivent être situées dans un plan. Faisons tourner un plan ε autour de e, coupant p et q dans les points mobiles

P et Q, les droites x et y, parallèles à e et passant par P et Q, parcourront des faisceaux de parallèles semblables. Pour chaque position de ε on construit un conoïde de Plücker, déterminé par a, b et x et qu'on suppose couper le plan (pq) suivant x_1; c, d et y déterminent un autre conoïde, dont la droite d'intersection avec (pq) s'appelle y_1. Les faisceaux de parallèles parcourus par x et x_1, y et y_1 deviennent semblables, et les faisceaux (x_1) et (y_1) ont alors une droite commune unique, la génératrice f commune aux conoïdes (a, b) et (c, d). Or ε, dans la position où x_1 et y_1 sont confondues, coupe les deux conoïdes suivant deux ellipses qui ont un point d'intersection en plus du point d'intersection sur f. Ce point F est le foyer cherché du réseau, et on l'obtient le plus commodément en cherchant les projections des deux ellipses sur le plan directeur; ces projections sont des cercles passant par les points d'intersection de ce dernier avec p et q.

28. N'étant données que quatre droites, on obtient ∞^1 de réseaux paraboliques qui tous contiennent ces droites; les foyers sont situés sur la courbe gauche du 3e ordre qui a pour sécantes doubles les quatre droites et dont la projection sur le plan directeur est un cercle.

La courbe est le lieu géométrique des points tels que les perpendiculaires de ces points aux quatre droites données, sont situées dans un même plan. Ceci nous fait rencontrer le théorème que voici:

Sur une courbe gauche de 3e ordre, située sur un cylindre de révolution, les distances d'un point quelconque de la courbe à toutes les sécantes doubles perpendiculaires à l'axe du cylindre, seront situées dans un même plan. Le système de toutes ces sécantes doubles est le transformé orthologique du système des tangentes d'une parabole.

Ce qui met en évidence ce dernier fait, c'est qu'on peut déterminer une orthologie de manière que, de deux réseaux paraboliques ayant le même plan directeur, l'un réponde à un plan et l'autre à un nouveau réseau parabolique ayant ce plan pour plan directeur.

29. Trois complexes linéaires dont les axes a, b et c sont parallèles à un même plan α, sans avoir toutefois aucune normale commune, déterminent une multiplicité linéaire de ∞^2 de complexes linéaires, dont les axes forment un réseau parabolique, et touchent pour cette raison un certain cône parabolique ayant une droite focale perpendiculaire à α.

En effet, les complexes répondant à a et à b déterminent un faisceau de complexes linéaires dont les axes sont situés sur un conoïde de Plücker déterminé (a, b). Il se forme d'une manière analogue un conoïde de Plücker (b, c). Ces conoïdes ayant des directrices parallèles et une génératrice commune, il est possible de rendre chaque génératrice de l'un correspondante et parallèle à une génératrice de l'autre. Chaque paire de ces génératrices correspondantes déterminent un faisceau de parallèles, et tous ces faisceaux sont formés par les axes de la susdite multiplicité de complexes linéaires.

Si a, b et c ont une normale commune, le réseau parabolique se réduit au faisceau de normales de cette dernière.

a, b et c étant parallèles, le réseau se réduira à un système de parallèles. Toutefois, si en même temps a, b et c sont situées dans un même plan, on n'obtiendra qu'un faisceau de parallèles. Enfin, si a, b et c se confondent, le réseau entier se réduira à une droite. Soient a, b et c les côtés d'un triangle, le réseau se composera de toutes les droites du plan de ce triangle, pourvu que les trois complexes donnés aux axes a, b et c aient des paramètres égaux.

Surfaces réglées et congruences répondant aux sections coniques.

30. Une courbe sur une surface sphérique peut toujours se définir le lieu géométrique d'un point mobile dont les distances sphériques θ_1, θ_2 .... à certains points fixes satisfont à une condition donnée. Si, appliquant notre principe, nous étendons la définition, nous ferons correspondre à la courbe sphérique une congruence dans l'espace où les angles de chaque droite θ_1, θ_2 .... avec certaines droites fixes, remplissent une condition de la forme

$$f(\theta_1, \theta_2 \ldots.) = 0 \qquad \text{(I)},$$

tandis que les distances a_1, a_2 .... à ces mêmes droites fixes satisfont à une équation de la forme:

$$a_1 \frac{df}{d\theta_1} + a_2 \frac{df}{d\theta_2} + \ldots. = F(\theta_1, \theta_2 \ldots) \qquad \text{(II)}.$$

En vertu de l'équation (I), la congruence a donc un cône directeur, et selon l'équation (II) toutes les droites à direction déterminée seront situées dans un seul plan. De la sorte, la congruence est une congruence de normales d'une certaine surface développable. Chaque propriété de l'indicatrice sphérique conduit à une propriété de la congruence.

Si l'on cherche une surface réglée dont les génératrices appartiennent à la congruence, on pourra généralement définir cette dernière l'ensemble des faisceaux de parallèles situés dans les plans centraux de la surface et dont les directions sont déterminées par celles des génératrices correspondantes.

Ceci rend évidente la manière d'appliquer éventuellement notre principe à déduire des propriétés importantes d'une surface réglée, uniquement à l'aide de l'indicatrice sphérique.

31. La congruence correspondante d'un grand cercle constitue un faisceau de normales. La congruence correspondante d'un cercle arbitraire se compose de toutes les droites qui font un angle constant avec une droite fixe et sont à une distance constante de cette droite. Cette droite fixe doit avoir un sens positif, et ici comme partout dans la suite, il faut compter les angles et les distances affectés de signes distincts. La congruence, que nous appelons *congruence hélicoïdale*, peut être conçue comme une congruence de normales d'un hélicoïde développable.

Voici quelques propositions qu'on peut déduire d'emblée de théorèmes connus sur la sphère:

Trois droites de sens positifs déterminent une seule congruence hélicoïdale dont l'axe est normale commune aux bissectrices extérieures pour les trois droites données, prises deux à deux.

Ordinairement il y a dans une congruence hélicoïdale deux droites qui sont normales à une droite donnée. Toutefois cette dernière peut avoir une situation telle qu'il peut y en avoir une infinité formant un faisceau de parallèles et qui appartiennent toutes à la congruence et sont normales à la droite donnée, qu'on peut alors appeler une tangente à la congruence.

Les tangentes de la congruence hélicoïdale en forment une nouvelle. Parmi la grande foule de propositions que va fournir la géométrie sphérique, citons-en encore une seule qui, sans avoir d'importance prépondérante, ne figurera qu'à titre d'exemple de l'application de notre principe:

A-t-on une figure trilinéaire dont les deux arêtes A et B sont fixes, tandis que la troisième C varie de manière à laisser constantes les quantités $(A)+(B)-(C)$ et $[A]+[B]-[C]$, le lieu géométrique de C est une congruence hélicoïdale contenant A et B.

32. La congruence répondant à une conique sphérique peut être définie le lieu géométrique d'une droite dont les angles avec deux droites déterminées de signe ont une somme constante, tandis que les distances à ces mêmes droites ont également une somme constante. Pour abréger, nous appelons *congruence conique* ce système de droites.

Nous appelons *droites focales* les droites fixes f et f_1. La congruence a trois droites de symétrie, savoir $[ff_1]$ et les bissectrices répondant à f et à f_1.

Il y a ordinairement dans la congruence deux droites qui sont normales à une droite donnée. Toutefois cette dernière peut être normale à tout un faisceau de parallèles de la congruence; alors nous l'appelons tangente à la congruence.

Toutes les tangentes forment une nouvelle congruence conique, que nous appelons *l'orthoréciproque* de la première.

33. Les droites de la congruence équidistantes des droites focales, forment une surface réglée que nous appellerons *la surface centrale* de la congruence.

Appelons l une génératrice de la surface centrale et m la bissectrice intérieure de f et de f_1, et, en vertu d'une formule connue sur la médiane d'un triangle sphérique, on aura:

$$\cos(ml) = \frac{\cos(fl) + \cos(f_1 l)}{2\cos(fm)}.$$

Cette formule permet de déduire par notre principe de duplication:

$$Q_{ml} = \frac{-[fl]\sin(fl) - [f_1 l]\sin(f_1 l)}{\cos(fl) + \cos(f_1 l)} - Q_{fm}$$

ou, comme $[fl] = [f_1 l]$:

$$Q_{ml} = -[fl]\,tg\,\frac{(fl) + (f_1 l)}{2} - Q_{fm}.$$

Or, $[fl]$ et $(fl) + (f_1 l)$ étant constantes pour toutes les génératrices l de la surface centrale et f et m étant des droites fixes, Q_{ml} doit être constante.

On prouve d'une manière analogue que $Q_{m_1 l}$ est constante, m_1 étant la bissectrice extérieure de f et de f_1.

Par conséquent, toutes les génératrices de la surface centrale ont un Q-paramètre constant par rapport et à m et à m_1, et partant doivent appartenir à une congruence linéaire (n⁰ 22) dont les directrices sont normales à $[ff_1]$ et dont les bissectrices sont m et m_1.

La surface ayant en outre un cône directeur du 2e ordre, on voit qu'elle est du 4e ordre et que des plans parallèles à f et à f_1 la coupent suivant des sections coniques; $[ff_1]$, m et m_1 sont les axes de symétrie de la surface.

34. Voici un cas particulièrement intéressant, celui où f et f_1 se coupent. Alors la surface centrale se réduit à un hyperboloïde (l'un des systèmes de génératrices) où f et f_1 sont des droites focales du cône asymptote puisqu'elles sont les axes de deux cylindres de révolution circonscrits à la surface. Nous avons donné à f et à f_1 le nom de droites focales de la congruence conique; nous les appellerons aussi *les droites focales de la surface centrale.*

Tout spécialement, dans le cas où f et f_1 se coupent et que la somme constante des distances de celles-ci à l'une des droites de la congruence est nulle, la surface centrale se changera en surface conique du 2e ordre. En conséquence, le système de normales d'une surface conique quelconque de 2e ordre, constitue une congruence conique.

Si f et f_1 se confondent, la congruence deviendra une congruence hélicoïdale. On pourra alors choisir pour surface centrale un hyperboloïde de révolution contenu dans la congruence.

35. Des propositions connues sur les coniques sphériques, on en déduit de nouvelles relativement à la congruence conique et, en outre, à sa surface centrale. Citons seulement quelques-unes de ces propositions.

Appelons *axe central* de g la plus courte distance d'une génératrice g d'une surface réglée à la consécutive, tandis que nous appelons *normale centrale* la normale de la surface au point central de g. Alors on aura:

sur la sphère:	dans l'espace:
La tangente et la normale en un point à une conique sphérique, sont bissectrices des angles que font les rayons focaux sphériques du point.	L'axe central et la normale centrale d'une génératrice arbitraire g d'une surface réglée appartenant à une congruence conique, seront bissectrices des distances de g aux droites focales.

Appliqué à l'hyperboloïde, ceci donne la simple détermination suivante de la ligne de striction:

La ligne de striction de l'un des systèmes de génératrices sur un hyperboloïde, divise en deux parties égales les segments des génératrices situés entre deux coniques déterminées sur la surface, savoir les courbes de contact des surfaces cylindriques de révolution circonscrites à la surface.

On peut appliquer cette proposition à construire la ligne de striction, ses tangentes et ses plans osculateurs; on peut ensuite l'appliquer à prouver simplement que la courbe est du 4[e] ordre, 2[e] espèce.

Citons encore, entre d'autres propositions:

Les quatre grands cercles qui joignent un point mobile d'une conique sphérique à quatre points fixes de cette	Les quatre distances les plus courtes d'une droite mobile d'une congruence conique à quatre

dernière, ont un rapport anharmonique constant.	droites fixes de cette dernière, ont une constante différence anharmonique.

Ensuite:

Les normales communes à des lignes correspondantes dans deux faisceaux de normales orthoprojectifs, constituent une congruence conique.

Voici à quoi nous conduit le théorème de Pascal:

Six droites arbitraires d'une congruence conique constituent les arêtes d'une figure hexalinéaire dans laquelle les plus courtes distances des côtés opposés, ont une normale commune.

En conséquence, cette proposition s'applique, par exemple, à six génératrices arbitraires du même genre sur un hyperboloïde, ou à six génératrices sur la susdite surface centrale du 4^e^ ordre, ou à six normales arbitraires à une surface conique du 2^e^ ordre.

Si l'hyperboloïde tend vers une surface cylindrique, on obtient relativement au plan le théorème de Pascal, et s'il tend vers le système de tangentes d'une conique, on obtient le théorème de Brianchon.

La congruence conique se trouve déterminée par cinq de ses droites. Quatre droites déterminent un faisceau de congruences dont les droites contenues dans un faisceau donné de normales forment une orthoinvolution, etc.

36. Si nous apparions les points d'une conique sphérique de manière à produire une involution, les grands cercles joignant des points correspondants, formeront un faisceau.

Nous pouvons, par un procédé analogue, apparier les droites d'une congruence conique de façon à leur faire former une orthoinvolution, et par là il faut entendre que les paires de distances d'une droite arbitraire de la congruence aux paires de droites appartenant à l'involution de la congruence, forment une orthoinvolution.

Les plus courtes distances entre les paires de droites d'une involution qui appartient à une congruence conique, doivent avoir une normale commune.

Ceci appliqué à l'hyperboloïde fournit le théorème que voici:

Si, sur un hyperboloïde, on apparie les génératrices de l'un des systèmes de manière qu'elles forment une involution (dans le sens ordinaire de ce terme), les plus courtes distances entre des génératrices correspondantes auront une normale commune et, par conséquent, doivent donner un conoïde de **Plücker**.

Toute la théorie polaire des coniques peut par extension s'appliquer à la congruence conique; mais nous sommes déjà assez avancés pour établir sans recherches détaillées ultérieures qu'à chaque proposition métrique ou de géométrie projective concernant une surface conique du 2^e ordre, on peut faire correspondre une proposition sur la congruence conique.

Applications cinématiques.

37. Une proposition sur deux ou plusieurs figures égales sur la sphère, nous permet d'en établir une nouvelle concernant des figures égales dans l'espace.

A une rotation sur la sphère répond un déplacement hélicoïdal dans l'espace, ou plutôt, un déplacement où chaque droite décrit une surface comprise dans une congruence hélicoïdale. En effet, la rotation sur la sphère est caractérisée par le fait que tous les points de la figure ont une distance constante à un point fixe; par conséquent, le déplacement correspondant dans l'espace doit être déterminé par le fait que toute droite doit avoir une distance constante à un axe fixe et faire avec lui un angle constant.

C'est pourquoi, si nous appliquons notre principe à des déplacements sphériques, on doit, après avoir différentié une relation où entrent les angles de certaines rotations, permuter les différentielles de ces dernières avec les translations des déplacements hélicoïdaux correspondants dans l'espace.

Ceci nous rend évident que:

Sans recherches nouvelles, et uniquement par l'application de notre principe, toute proposition cinématique sphérique peut devenir par duplication une proposition relative à l'espace.

Par conséquent, les lois pour opérer sur des déplacements hélicoïdaux peuvent, sous forme tout à fait générale, se déduire des lois de rotations dont les axes passent par un point fixe.

38. Choisissons à titre d'exemple les propositions connues que voici:

Deux figures égales sur la sphère peuvent être amenées à se superposer par une seule rotation.	Deux figures égales dans l'espace peuvent être amenées à se superposer par un seul déplacement hélicoïdal.
Trois rotations sur la sphère qui se détruisent entre elles, le triangle ABC des centres de rotation étant connu, seront déterminées de manière que les angles du triangle sont les demi-angles de rotation des trois rotations.	Trois déplacements hélicoïdaux exécutés dans l'espace et qui se détruisent, sont déterminés par leurs trois axes de manière que les angles faits par les plus courtes distances de ces derniers, sont les demi-angles et que les distances entre ces droites sont les demi-transla-

tions des trois déplacements hélicoïdaux[1]).

Un déplacement arbitraire sur la sphère peut, d'une infinité de manières, être composé de deux rotations de 180°.

Un déplacement arbitraire d'une figure dans l'espace peut, d'une infinité de manières, être composé de deux rotations de 180° [1]).

Trois figures égales arbitraires sur la sphère coïncident avec les symétriques d'une même figure prises respectivement par rapport à trois points sur la sphère.

Trois figures égales arbitraires dans l'espace coïncident avec les symétriques d'une même figure prises respectivement par rapport à trois droites [1]).

39. Passons maintenant à étudier la composition de mouvements infinitésimaux. Supposons représentées par les arcs de grand cercle OA et OB deux rotations infiniment petites sur la sphère, de manière que les axes de rotation soient les normales positives aux plans de ces cercles, et que les vitesses angulaires soient respectivement $tg(OA)$ et $tg(OB)$. Alors les rotations peuvent se composer de la manière suivante.

Sur OA et OB, on prend respectivement $OA_1 = 90°$ et $OB_1 = 90°$; ensuite on trace les grands cercles A_1B et B_1A tels qu'ils se coupent en C. Alors OC représente la rotation résultante de même que OA et OB représentent les rotations données. On a la preuve de l'exactitude de cette composition en projetant du centre de la sphère la figure sur le plan tangent en O. Alors le quadrilatère $OABC$ sera projeté comme un parallélogramme dont les côtés et la diagonale passant par O sont proportionnels à $tg(OA)$, $tg(OB)$ et à $tg(OC)$, et dont

[1]) Darboux: *Sur les renversements et les inversions planes* (Kœnigs: *Leçons de cinématique,* p. 346).

l'angle en O est précisément l'angle des axes de rotation donnés.

Or, si l'on a un déplacement hélicoïdal infinitésimal ayant a pour axe, ω pour vitesse angulaire et t pour vitesse de translation, on pourra employer la représentation suivante:

On choisit deux normales à a, dont on détermine l'angle u et la plus courte distance k de manière que $\omega = tgu$ et $t = \frac{k}{\cos^2 u}$. Appelle-t-on n et n^1 ces deux normales, nous désignerons le déplacement hélicoïdal par $[nn^1]$.

Si l'on doit composer deux déplacements hélicoïdaux ayant les axes a et b, et qu'on les représente par $[np]$ et $[nq]$, n étant la normale commune à a et à b, on procède comme suit: a et b sont tournés chacun de 90° autour de n jusqu'à gagner les positions respectives a_1 et b_1; on mène la normale commune r à $[pb_1]$ et à $[qa_1]$. Alors $[nr]$ sera le déplacement hélicoïdal résultant.

40. On peut aussi représenter une rotation sur la sphère par un point O (centre de la rotation) et un nombre ω (vitesse angulaire). Désignons par $O(\omega)$ cette rotation.

Si $A(\omega_1)$ et $B(\omega_2)$ ont pour résultante $C(\omega)$, C sera déterminé sur l'arc AB de telle sorte que

$$\frac{\sin(AC)}{\sin(CB)} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

et
$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\,\omega_2 \cos(AB).$$

Voici comment on étend cette composition:

Un déplacement hélicoïdal $a\ (\omega, t)$ est représenté par son axe a et deux nombres ω (vitesse angulaire) et t (vitesse de translation);

si a (ω_1, t_1) et b (ω_2, t_2) ont c (ω, t) pour résultante, c doit être normale à $[ab]$, de sorte que

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad (1);$$

de plus on obtient l'équation qu'on en déduit:

$$\frac{d \sin(ac)}{\sin(ac)} - \frac{d \sin(cb)}{\sin(cb)} = \frac{d\omega_2}{\omega_2} - \frac{d\omega_1}{\omega},$$

qui conduit à

$$P_{ac} - P_{bc} = \frac{t_2}{\omega_2} - \frac{t_1}{\omega_1} \qquad (2).$$

Les deux équations (1) et (2) déterminent l'axe hélicoïdal, la première le sens de ce dernier, la seconde un conoïde de Plücker sur lequel il doit être situé. De la sorte, notre principe nous à conduits à la composition signalée par M. Ball[1]).

ω et t sont déterminés par l'équation:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos(ab)$$

et par l'équation qu'on en déduit:

$$\omega t = \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + (\omega_1 t_2 + \omega_2 t_1) \cos(ab) - \omega_1\omega_2 \cdot [ab] \sin(ab).$$

41. En un point arbitraire A de l'indicatrice sphérique d'une surface réglée, la tangente sphérique se définit le grand cercle joignant ce point au point consécutif A' de la courbe, et le centre de courbure sphérique O se définit le centre (sur la sphère) d'un petit cercle passant par A et les points de courbe consécutifs A' et A''. Cela nous conduit, en ce qui concerne la surface réglée à établir deux notions: l'axe central d'une génératrice arbitraire a, défini la plus courte distance a_1 de a à la génératrice consécutive a' sur la surface, ainsi que l'axe hélicoïdal, défini l'axe o d'un hélicoïde développable, auquel a et les deux génératrices a' et a'' sont normales.

---

[1]) Ball: *Theory of screws*, p. 18.

Au moyen de l'indicatrice sphérique on aura:

$tg(ao) = \frac{\sin(aa')}{\sin(a_1 a'_1)}$, où a_1 et a'_1 sont des axes centraux consécutifs.

On déduit de cette formule:

$$T_{ao} = P_{aa'} - P_{a_1 a_1'}.$$

$P_{aa'}$ est la grandeur appelée le paramètre p de a, et $P_{a_1 a_1'} = p_1$ est le paramètre correspondant sur la surface orthoréciproque, c'est-à-dire la surface réglée engendrée par les axes centraux pour les génératrices de la surface donnée.

Les quantités $tg(ao)$ et $T_{ao} = p - p_1$ déterminent la position de l'axe hélicoïdal o.

Tous les axes hélicoïdaux deviennent axes centraux de la normalie centrale de la surface donnée, c'est-à-dire la surface formée par les normales correspondant aux plans centraux.

Nous pouvons appeler *développée hélicoïdale* la surface des axes hélicoïdaux. De la sorte, deux surfaces orthoréciproques ont la même développée hélicoïdale.

Si la surface réglée tend à devenir développable, l'axe hélicoïdal sera l'axe d'une hélice osculatrice de l'arête de rebroussement.

Comme $P_{aa'} = 0$, on a dans ce cas-ci:

$$T_{ao} = -P_{a_1 a_1'};$$

appelle-t-on respectivement r et ρ le premier et le second rayon de courbure, on déduit facilement par là la valeur absolue de $[ao]$, savoir:

$$[ao] = \frac{r^2 \rho}{r^2 + \rho^2} = \frac{R^2}{\rho},$$

où R est le troisième rayon de courbure.

42. Citons, à titre d'exemple de transformation d'une construction infinitésimale à partir de la sphère à l'espace:

Quand une surface réglée roule sur une autre, les deux se raccordant suivant la génératrice a, tandis qu'une droite l

est invariablement liée à la surface roulante, on peut construire l'axe hélicoïdal o de la surface réglée décrite par l, si l'on connaît les axes hélicoïdaux o_1 et o_2 de la surface roulante et de la surface fixe par rapport à la génératrice commune a. Voici l'aspect de cette construction, déduite de la construction si connue, dite d'Euler, du centre de courbure d'une épicycloïde:

On appelle m la normale commune à $[la]$ et à a; on en cherche la normale n commune à $[lo_1]$. L'axe hélicoïdal o est alors normale commune à $[no_2]$ et à $[la]$.

Coordonnées d'une droite.

43. De tout système de coordonnées sphériques, on peut déduire un système de coordonnées pour les droites de l'espace.

Choisit-on sur la sphère un triangle sphérique trirectangle xyz, un point p est déterminé par les trois coordonnées que voici:

$$\cos(xp) = x_1, \quad \cos(yp) = x_2, \quad \cos(zp) = x_3,$$
$$\text{où } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad (1).$$

Par conséquent, on peut, au moyen des six grandeurs suivantes, déterminer une droite arbitraire p dans l'espace par rapport au trièdre trirectangle xyz:

$$x_1 = \cos(xp), \quad x_2 = \cos(yp), \quad x_3 = \cos(zp),$$
$$X_1 = M_{xp}, \quad X_2 = M_{yp}, \quad X_3 = M_{zp}\ ^{1)}.$$

La relation (1) conduit à l'équation identique:

$$x_1X_1 + y_1Y_1 + z_1Z_1 = 0.$$

Notre principe nous a donc conduits aux coordonnées de Plücker. A-t-on deux droites p et p_1, leur angle est déterminé par la formule:

$$\cos(pp') = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'.$$

---

[1]) $M_{xp} = -[xp]\sin(xp)$; $[xp]\sin(xp)$ s'appelle ordinairement le moment des droites x et p.

Si l'on différentie cette formule et qu'on applique notre principe de duplication, on a:

$$M_{pp'} = X_1 x'_1 + X_2 x'_2 + X_3 x'_3 + X'_1 x_1 + X'_2 x_2 + X'_3 x_3$$

c'est-à-dire l'expression connue du moment de deux droites.

44. Les formules de transformation des coordonnées d'un point, dans le passage d'un système de coordonnées rectangulaires dans l'espace en un autre ayant la même origine, donneront, par la différentation, des formules de transformation pour les coordonnées d'une droite dans le passage d'un système trirectangle en un autre système trirectangle q u e l c o n q u e.

Nous nous contenterons de considérer les formules de transformation ordinaires où entrent rationellement trois paramètres.

Supposons que les coordonnées d'une droite dans les deux systèmes coordonnés soient:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,$$
$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ X'_1,\ X'_2,\ X'_3.$$

Alors on a:

$$(l^2+m^2+n^2+1)x'_1 = (l^2-m^2-n^2+1)x_1+2(lm-n)x_2+2(ln+m)x_3$$
$$(l^2+m^2+n^2+1)x'_2 = 2(lm+n)x_1+(-l^2+m^2-n^2+1)x_2+2(mn-l)x_3$$
$$(l^2+m^2+n^2+1)x'_3 = 2(ln-m)x_1+2(mn+l)x_2+(-l^2-m^2+n^2+1)x_3,$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} 2\,(ll'+mm'+nn')\,x' + (l^2+m^2+n^2+1)\,X'_1 \\ = (l^2-m^2-n^2+1)\,X_1 + 2\,(lm-n)\,X_2 \\ + 2\,(ln+m)\,X_3 + 2\,(ll'-mm'-nn')\,x_1 \\ + 2\,(lm'+l'm-n')\,x_2 + 2\,(ln'+l'n+m')\,x_3 \quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

l', m' et n' étant trois constantes nouvelles.

Les formules doivent toutes être rendues homogènes par l'introduction de

$$\frac{l}{r},\ \frac{m}{r}\ \ldots\ \text{pour}\ l,\ m\ \ldots$$

Si le déplacement hélicoïdal qui peut faire passer l'un des systèmes de coordonnées dans l'autre, a θ pour amplitude et k

pour translation, tandis que les coordonnées de l'axe du déplacement sont $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, M_1, M_2 et M_3, on a, comme on sait:

$l = \cos\alpha \, tg\frac{\theta}{2}$ et les analogues. Ce qui donne

$l' = M_1 \, tg\frac{\theta}{2} + \cos\alpha \cdot \frac{k}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$ et les analogues.

Le cas limite $\theta = 0$ et $\theta = 180°$ se traite aisément.

45. Les coordonnées sphériques dites de Gudermann fournissent la détermination suivante d'une droite p dans l'espace par rapport à un système de coordonnées rectangulaires xyz:

Les plus courtes distances p_1 et p_2, de p respectivement à x et à y, sont tournées de 90° autour de celles-ci jusqu'à atteindre les positions m et n; on peut alors se servir des quatre grandeurs suivantes comme coordonnées de p:

$$x_1 = tg\,(zm), \qquad X_1 = \frac{[zm]}{\cos^2(zm)}$$

$$x_2 = tg\,(zn), \qquad X_2 = \frac{[zn]}{\cos^2(zn)},$$

Si deux droites sont normales réciproques, on a:

$$x_1x_1' + x_2x_2' = -1 \quad \text{et}$$

$$X_1x_1' + X_2x_2' + X_1'x_1 + X_2'x_2 = 0,$$

d'où résultent les équations suivantes d'un faisceau de normales:

$$ax_1 + bx_2 = -1$$

$$aX_1 + bX_2 + Ax_1 + Bx_2 = 0,$$

où (a, b, A, B) sont les coordonnées de la base du faisceau de normales.

L'équation $aX_1 + bX_2 + Ax_1 + Bx_2 = 0$ représente un complexe qui contient une infinité de faisceaux de normales dont les bases ont les coordonnées λa, λb, λA, λB, λ étant variable.

Ces bases engendreront un conoïde de Plücker contenant l'axe z et une des normales de celui-ci.

Par conséquent, une équation homogène linéaire en x_1, x_2, X_1, X_2 représente un complexe harmonique contenant le faisceau de normales de l'axe z, ainsi qu'un second faisceau de normales dont la base est normale à l'axe z.

Une équation linéaire générale représentera un complexe harmonique contenant toutes les normales de l'axe z; c'est pourquoi deux équations de ce genre représentent un réseau harmonique dont le réseau réciproque contient l'axe z.

Réduction analytique de la géométrie des droites en géométrie sphérique.

46. Nous définissons un nombre symbolique de la forme $a+\varepsilon b$, où a et b sont des grandeurs le la forme $x+y\sqrt{-1}$. On effectue des opérations sur nos nombres nouveaux en traitant ε comme un facteur algébrique ordinaire; par ce moyen on effectue sans ambiguïté additions et soustractions. La multiplication fournit une nouvelle grandeur ε^2, qu'on pose $=0$.

Si donc on a deux nombres

$$z = a+\varepsilon b = a\left(1+\varepsilon\frac{b}{a}\right) \quad \text{et}$$

$$z_1 = a_1+\varepsilon b_1 = a_1\left(1+\varepsilon\frac{b_1}{a_1}\right),$$

on aura:

$$zz_1 = aa_1\left(1+\varepsilon\left(\frac{b}{a}+\frac{b_1}{a_1}\right)\right).$$

Par conséquent, amenant chacun de nos nombres à la forme $a(1+\varepsilon T)$, où nous appelons a l'abscisse du nombre et T son paramètre, on a le produit des deux nombres en multipliant les abcisses et en ajoutant les paramètres.

Quant à la division, elle ne fait pas de difficultés. Pourtant il faut remarquer que les grandeurs εb, qui ont l'abscisse 0 et le paramètre ∞, tandis que le produit de l'abscisse et du paramètre a la valeur b, en arrivent à jouer un rôle spécial.

L o r s q u ' u n p r o d u i t e s t n u l , i l f a u t o u b i e n q u e l ' u n d e s f a c t e u r s s o i t n u l o u b i e n q u e d e u x d e s f a c t e u r s a i e n t l a f o r m e εb.

A-t-on à effectuer la division $\frac{z}{\varepsilon b}$, on obtient généralement un quotient à l'abscisse ∞ et au paramètre ∞. Si $z = 0$, la valeur du quotient devient un nombre indéterminé de la forme εb_1.

47. En posant $z = a + \varepsilon b$, on a, pour n positif et entier:

$$z^n = a^n + \varepsilon b\, n a^{n-1}.$$

Si donc f désigne une fonction rationnelle et entière [1]), on a identiquement:

$$f(a + \varepsilon b) = f(a) + \varepsilon b f'(a) \qquad (1).$$

Cette équation sera également applicable à $z^{\frac{1}{q}}$ et à z^{-n}, fonctions qui pour q et n positifs et entiers se définissent comme d'ordinaire:

$$z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a\left(1 + \varepsilon \cdot \frac{b}{a}\right)} = a^{\frac{1}{q}}\left(1 + \varepsilon \frac{b}{qa}\right) \quad \text{et}$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{a^n + \varepsilon b\, n a^{n-1}} = a^{-n} - \varepsilon n a^{-n-1} \cdot b.$$

Si l'équation (1) s'applique à f et à F, elle s'appliquera aussi à $f + F$, ainsi qu'à

$$\varphi(z) = f(z) \cdot F(z) \quad \text{et à} \quad \psi(z) = \frac{f(z)}{F(z)};$$

à titre d'exemple, nous prouvons l'applicabilité de la formule à la dernière de ces fonctions:

$$\psi(z) = \frac{f(a + \varepsilon b)}{F(a + \varepsilon b)} = \frac{f(a) + \varepsilon b f'(a)}{F(a) + \varepsilon b F'(a)} \quad \text{ou}$$

$$\psi(a + \varepsilon b) = \frac{f(a)}{F(a)}\left(1 + \varepsilon b\left(\frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{F'(a)}{F(a)}\right)\right),$$

---

[1]) Ici, comme dans la suite, nous entendons par fonction celle qui, outre la variable indépendante, ne contient que des quantités complexes.

d'où l'on a précisément:

$$\psi(a + \varepsilon b) = \psi(a) + \varepsilon b\, \psi'(a).$$

On prouve également avec facilité que l'applicabilité de la formule aux fonctions f et F la rend applicable aussi à la fonction $f(F(z))$:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= f(F(z)) = f(F(a) + \varepsilon b F'(a)) \\ &= f(F(a)) + \varepsilon \cdot bF'(a) f'(F(a)) \quad \text{c. q. f. d.}\end{aligned}$$

Si l'équation (1) s'applique à une certaine fonction f, elle s'applique aussi à la fonction inverse f_1; en effet, si l'on pose $f_1(a + \varepsilon b) = u + \varepsilon v$, u et v sont déterminées par l'équation $f(u + \varepsilon v) = f(u) + \varepsilon v f'(u) = a + \varepsilon b$; par conséquent $f(u) = a$, $vf'(u) = b$ ou bien $u = f_1(a)$, $v = \dfrac{b}{f'(u)} = bf_1'(a)$, c. q. f. d.

$\cos z$, $\sin z$, e^z se définissent au moyen des développements connus, qui donnent:

$$\begin{aligned}\cos(a + \varepsilon b) &= \cos a - \varepsilon b \sin a \\ \sin(a + \varepsilon b) &= \sin a + \varepsilon b \cos a \\ e^{a+\varepsilon b} &= e^a + \varepsilon b\, e^a.\end{aligned}$$

L'équation (1) s'applique donc tant à ces fonctions-là qu'aux fonctions inverses arc $\cos z$, arc $\sin z$ et $\log. z$.

48. Si l'on a une équation algébrique de $n^{\text{ième}}$ degré

$$f(z) + \varepsilon \varphi(z) = 0,$$

où f et φ sont des fonctions rationnelles entières, et si nous cherchons toutes les racines de la forme $a + \varepsilon b$, on a, en substituant cette grandeur:

$$f(a) + \varepsilon\varphi(a) + \varepsilon b f'(a) = 0, \text{ qui se divise en deux:}$$

$$f(a) = 0, \quad \varphi(a) + bf'(a) = 0;$$

par conséquent, il y a ordinairement n racines.

Toutefois il faut noter spécialement que:

L'équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré $f(z) = 0$, où tous les coefficients ont la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α et β étant réels, a n racines (les racines complexes ordinaires). Cependant, si une grandeur complexe r est racine double dans l'équation, soit $f(r)$ et $f'(r)$, l'une et l'autre $= 0$, il y aura une infinité de racines $r + \varepsilon b$ où b est un nombre complexe arbitraire.

On peut en dire autant de chaque équation $f(z) = 0$, où f satisfait à l'équation fondamentale (1) du numéro 47.

49. Si f est une fonction entière et rationnelle de plusieurs variables, on a, au moyen de la formule de Taylor:

$$f(a_1 + \varepsilon b_1,\ a_2 + \varepsilon b_2,\ \ldots.)$$
$$= f(a_1, a_2 \ldots) + \varepsilon\left(b_1 \frac{df(a_1, a_2 \ldots.)}{da_1} + b_2 \frac{df(a_1, a_2 \ldots.)}{da_2} + \ldots\right) \ (2).$$

Si cette équation est applicable aux fonctions f et F, elle le sera aussi aux fonctions $f + F$, $f \cdot F$, $\frac{f}{F}$, ou plus généralement: si cette équation est vraie pour les fonctions

$$f_1(z_1, z_2 \ldots. z_n),\ f_2(z_1, z_2 \ldots. z_n) \ldots. f_p(z_1, z_2 \ldots. z_n)$$

ainsi que pour la fonction $F(z_1, z_2 \ldots. z_p)$, elle s'appliquera aussi à la fonction

$$u = F(f_1(z_1, z_2 \ldots. z_n),\ f_2(z_1, z_2 \ldots. z_n),\ \ldots. f_p(z_1, z_2 \ldots. z_n)).$$

En effet, en posant

$$f_k(z_1, z_2 \ldots. z_n) = A_k + \varepsilon B_k, \quad k = 1, 2, \ldots. n,$$

où $A_k = f_k(a_1, a_2 \ldots. a_n)$,

$$B_k = b_1 \frac{df_k(a_1, a_2 \ldots. a_n)}{da_1} + b_2 \frac{df_k(a_1, a_2 \ldots. a_n)}{da_2} + \ldots.;$$

on a: $\quad u = F(A_1 + \varepsilon B_1,\ A_2 + \varepsilon B_2,\ \ldots. A_p + \varepsilon B_p)$

ou, puisque l'équation (2) est vraie pour F:

$$u = F(A_1, A_2 \ldots. A_p) + \varepsilon\left(B_1 \frac{dF(A_1, A_2 \ldots. A_p)}{dA_1}\right.$$
$$\left. + B_2 \frac{dF(A_1, A_2 \ldots. A_p)}{dA_2} + \ldots.\right).$$

Si l'on y substitue les valeurs de A_1, $A_2 \ldots. A_p$, B_1, $B_2 \ldots. B_p$, l'exactitude de la proposition est prouvée.

Or, on peut aisément démontrer qu'une fonction donnée implicitement au moyen d'une équation contenant seulement des fonctions qui satisfont à l'équation (2) ou spécialement à l'équation (1), satisfera elle-même à cette équation.

Donc, l'équation (2) (et spécialement l'équation (1)) s'appliquent à toutes les fonctions définissables au moyen de fonctions définissables au moyen de fonctions algébriques et de la fonction exponentielle (y compris $\cos z$, $\sin z$, e^z et leurs fonctions inverses).

50. Maintenant, au moyen des équations (1) et (2), nous voici en état de formuler de la manière suivante notre *principe de duplication* sphérique:

Si l'on est en présence d'un système arbitraire de droites dans l'espace $l_1, l_2 \dots l_m$ (de sens positifs déterminés) et qu'on pose $\angle(l_i l_k) = v_{ik}$ et la distance $[l_i l_k] = a_{ik}$, une relation identique arbitraire entre les angles:

$$f(v_{12}, v_{13} \dots) = 0$$

donnera une relation identique pour la figure de droites, quand on remplacera v_{ik} par $v_{ik} + \varepsilon a_{ik}$.

Car, si l'on effectue cette substitution, en posant pour abréger:

$$f(v_{12}, v_{13} \dots) \equiv f(v), \text{ et}$$

$$f(v_{12} + \varepsilon a_{12}, v_{13} + \varepsilon a_{13}, \dots) \equiv f(v + \varepsilon a), \text{ on aura}$$

$$f(v + \varepsilon a) = 0 \quad \text{ou, en vertu de l'équation (2):}$$

$$f(v) + \varepsilon \Sigma a_{ik} \frac{df(v)}{dv_{ik}} = 0, \quad \text{qui se divise en}$$

$$f(v) = 0 \quad \text{et}$$

$$\Sigma a_{ik} \frac{df(v)}{dv_{ik}} = 0.$$

Ici la première équation est la relation angulaire présentée, et la dernière est la relation de la figure de droites, qui en résulte en vertu de notre principe.

On peut donc regarder la géométrie des droites comme une géométrie sphérique où l'on opère sur des points symboliques dont les nombres de position ont la forme $a + \varepsilon b$, $\varepsilon^2 = 0$.

Cela posé, on peut concevoir une droite arbitraire dans l'espace comme appartenant à un faisceau déterminé où elle est déterminée par des coordonnées $(a + \varepsilon b,\ c + \varepsilon d)$ répondant à un système où des coordonnées réelles déterminent des droites réelles; un déplacement hélicoïdal peut être conçu comme une rotation symbolique d'amplitude $v + \varepsilon k$; un système arbitraire de forces dans l'espace peut être composé pour former une seule force de la grandeur $A + \varepsilon B$.

Citons, à titre de simple exemple, celui qui suit, en opérant sur un système de coordonnées rectangulaires xyz dans l'espace.

Une force R passant par l'origine et faisant les angles α, β, γ avec les axes, peut être décomposée en trois forces $R \cos \alpha$, $R \cos \beta$, $R \cos \gamma$, portées respectivement par les axes x, y et z.

Un dyname, dont la réduction canonique conduit à la force unique R et le couple G et dont l'axe central fait les angles α, β, γ avec x, y, z, et a les distances a, b, c à ces axes, peut être décomposé en trois autres dynames agissant suivant les axes coordonnés, et l'on peut dire que la grandeur de ces dynames est:

$$(R + \varepsilon G) \cos (\alpha + \varepsilon a) = R \cos \alpha + \varepsilon (G \cos \alpha - R a \sin \alpha)$$

et les analogues.

Par là on obtient les expressions connues des projections du système des forces sur les axes, ainsi que les moments du système par rapport aux axes.

51. Maintenant les congruences qui, comme on l'a dit précédemment, répondront à des courbes sphériques algébriques, peuvent être représentées par une équation de la forme $f(u + \varepsilon h, v + \varepsilon k) = 0$, u, v, h et k étant les coordonnées considérées au n° 45.

D'autres congruences, au contraire, seront représentées par deux équations: $\varphi(u, v, h, k) = 0$, $\psi(u, v, h, k) = 0$. Alors le système de points sur la sphère, représenté par des équations telles qu'elles ne peuvent pas se réduire en une seule du genre susdit, ne sera pas une courbe dans le sens ordinaire de ce terme.

Ainsi, deux équations du 1er degré représenteront un réseau harmonique de droites. Le système de points correspondant sur la sphère n'engendre pas de grand cercle; mais, si un grand cercle contient deux points du système, ∞^1 des points de cet arc seront contenus dans ce système, et il y a ∞^1 de ces grands cercles; tous les autres ont un point, et seulement un de ses points, de commun avec le système de points considéré.

Appelons *congruence monogène* celle que représente une équation unique $f(u + \varepsilon h, v + \varepsilon k) = 0$.

On peut tirer directement de la théorie des courbes algébriques les propositions sur ces congruences. Si la courbe algébrique correspondante est du $n^{\text{ième}}$ ordre, nous dirons que la congruence est de la $n^{\text{ième}}$ espèce.

Par suite, le faisceau de normales est une congruence monogène de 1re espèce, et la congruence conique une congruence monogène de 2e espèce.

52. Un nombre complexe $a + ib$ peut être représenté sur la sphère au moyen d'un triangle sphérique trirectangle xyz, sur les côtés duquel les sens de parcours sont yz, zx et xy; si l'on choisit un point p sur la sphère et que xp et yp coupent respectivement yz et zx en p_1 et en p_2 de manière que $tg(zp_1) = a$ et $tg(zp_2) = b$, p peut représenter le nombre $a + ib$. La figure donne:

$$a = tg(zp_1) = tg(zp)\cos\theta, \qquad b = tg(zp_2) = tg(zp)\sin\theta,$$

θ étant l'angle dont yz doit être tourné dans le sens xy pour coïncider à zp, dont le sens positif est déterminé par l'arc le plus court de z à p.

Par conséquent, $tg(zp)$ est le module de la quantité et θ son argument. Au moyen des droites de l'espace, on peut étendre cette représentation jusqu'à représenter des quantités de la forme

$$\omega = a + ib + \varepsilon(c + id), \quad \text{où } \varepsilon^2 = 0.$$

Choisissons un système de coordonnées rectanglaires xyz ayant les sens de rotation positifs yz, zx et xy.

p_1 et p_2 sont normales respectives à l'axe x et à l'axe y, de façon que

$$tg(zp_1) = a \qquad tg(zp_2) = b$$
$$T_{zp_1} = \frac{c}{a} \qquad T_{zp_2} = \frac{d}{b};$$

si l'on fait tourner d'angles droits p_1 et p_2 respectivement autour de x et de y, on aura deux droites nouvelles dont la normale commune p peut représenter la quantité ω.

En vertu des formules sphériques ci-dessus, on a:

$$\frac{c}{a} = T_{zp_1} = T_{zp} + Q_{xr}, \; r \text{ désignant } [zp] \text{ et } \frac{d}{b} = T_{zp_2} = T_{zp} + P_{xr}.$$

Si maintenant, pour abréger, on pose

$$[xr] = \rho, \; T_{zp} = T, \; \angle(xr) = \theta, \; \angle(zp) = v, \text{ on aura}$$

$$\begin{aligned}
a &= tg\,v\cos\theta \\
b &= tg\,v\sin\theta \\
c &= a(T - \rho\,tg\,\theta) = tg\,v\cos\theta(T - \rho\,tg\,\theta) \\
d &= b(T + \rho\cot\theta) = tg\,v\sin\theta(T + \rho\cot\theta);
\end{aligned}$$

donc,

$$\omega = a + ib + \varepsilon(c + id) = tg\,v(\cos\theta + i\sin\theta)(1 + \varepsilon(T + i\rho))$$

ou, en posant $$tgv = t,$$
$$\omega = t(\cos\theta + i\sin\theta)(1 + \varepsilon(T + i\rho)).$$

On fait le produit de deux pareilles quantités en multipliant lés grandeurs t et en ajoutant aux constantes θ, T et ρ de l'un des nombres les constantes correspondantes de l'autre nombre.

$t(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la quantité que nous avons appelée l'abscisse, tandis que $T + i\rho$ constitue le paramètre du nombre.

Quant à l'addition de deux nombres ω et ω_1 représentés par deux droites p et p_1, voici l'opération géométrique qui y correspond: on fait tourner de 90° autour de z les droites $[pz]$ et $[p_1z]$ jusqu'à ce qu'elles prennent les positions p' et p'_1; alors la normale s commune à $[p'p_1]$ et à $[p'_1p]$ représentera le nombre $\omega + \omega_1$, ce qu'on voit en étendant directement la règle, formulée dans l'exposé susdit, pour l'addition des nombres complexes sur la sphère.

Tous les nombres complexes $a + ib$ se laissent représenter par des droites passant par l'origine du système coordonné, tandis que tous les nombres de la forme $\varepsilon(c + id)$ se laissent représenter par des droites parallèles à l'axe z.